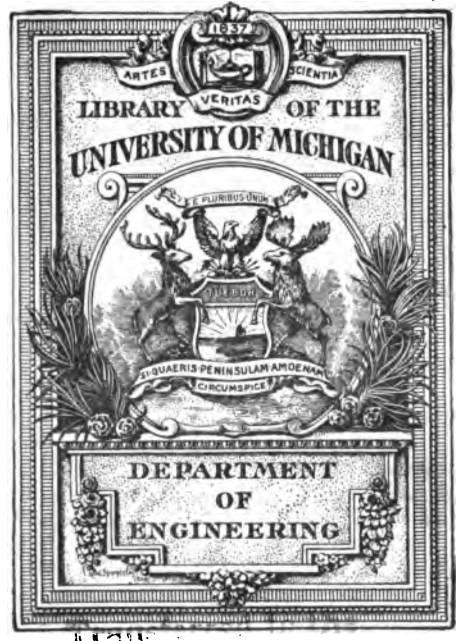
P. P.

Meinen umfangreichen Verlag auf dem Gebiete der **Mathematischen,** der **Technischen und Naturwissenschaften nach allen Richtungen** hin weiter a… Wohlwollen
zahlreic… g begleitetes
Bemühe… bei gleicher
Unterst… In- und Aus-
landes … d Lernenden
in Wis… **Verlags-**
anerbi… werden mir
deshalb … er denselben
Gegenst… ommen sein.
Un… nz besonders
auf die … en, Leipzig,
Münche… **ematischen**
Wissen… hmetik und
Algebra … Physik, die
Geodäsi… d in einem
Schlußb… besprechen
wird. … thematikern
besorgt,
We… und natur-
wissens… Die **Mathe-**
matisc… itschrift für
Geschic… **der Mathe-**
matik … **hematiker-**
Verein… k (Organ für
angewa… **schen und**
naturw… **isch-natur-**
wissen… (Zeitschrift
für de… hulen), die
Geogra…



Seit 1868 veröffentliche ich: **„Mitteilungen der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner“.** Diese jährlich zweimal erscheinenden „Mitteilungen“, die in 30000 Exemplaren im In- und Auslande von mir verbreitet werden, sollen das Publikum, das meinem Verlage Aufmerksamkeit schenkt, von den erschienenen, unter der Presse befindlichen und von den vorbereiteten Unternehmungen des Teubnerschen Verlags durch ausführliche Selbstanzeigen der Verfasser in Kenntnis setzen und sind ebenso wie das bis auf die Jüngstzeit fortgeführte **Ausführliche Verzeichnis des Verlags von B. G. Teubner auf dem Gebiete der Mathematik, der Technischen und Naturwissenschaften nebst Grenzgebieten,** 100. Ausgabe [XLVIII u. 272 S. gr. 8], in allen Buchhandlungen unentgeltlich zu haben, werden auf Wunsch aber auch unter Kreuzband von mir unmittelbar an die Besteller übersandt.

Leipzig, Poststraße 3.

B. G. Teubner.

VORLESUNGEN

ÜBER

TECHNISCHE MECHANIK

VON

DR. AUG. FÖPPL

PROF. A. D. TECHN. HOCHSCHULE IN MÜNCHEN

DRITTER BAND

FESTIGKEITSLEHRE

MIT 83 FIGUREN IM TEXT

DRITTE AUFLAGE



LEIPZIG

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER

1905

Aus dem Vorworte zur ersten Auflage.

An der technischen Hochschule in München erstreckten sich die Vorlesungen über technische Mechanik von jeher über das ganze Gebiet der Mechanik, soweit es für die Ausbildung der Techniker überhaupt in Betracht kommt. Schon mein Vorgänger, Bauschinger, war bemüht, seinen Hörern alles zu bieten, was der Techniker von der Mechanik wissen sollte, und ich bin ihm darin gefolgt. Der Besuch einer vom mathematischen Standpunkte aus abgehaltenen Vorlesung über analytische Mechanik kann zwar den sich für die theoretischen Seiten der Mechanik näher interessierenden Studierenden daneben lebhaft empfohlen werden; für die weitaus überwiegende Mehrzahl der Hörer reicht aber nach den Traditionen unserer Hochschule die Vorlesung über technische Mechanik schon vollständig aus. Bei den großen Ansprüchen, die heute von allen Seiten an die Zeit und an die Arbeitskraft der studierenden Techniker gestellt werden, ist der Vorteil, der diesen hieraus erwächst, nicht zu unterschätzen.

Schon bald nachdem ich meine Vorlesungen an der hiesigen Hochschule aufgenommen hatte, wurde mir von meinen Hörern der Wunsch ausgesprochen, in den Besitz eines Lehrbuchs zu kommen, das sich möglichst eng an die Vorlesungen anschlösse. Ich mußte diesen Wunsch als berechtigt anerkennen und suchte ihm einstweilen dadurch entgegenzukommen, daß ich autographierte Blätter herstellen ließ, die in gedrängter Kürze die wichtigsten Sätze und Formeln enthielten. Ich konnte aber nicht lange in Zweifel darüber

bleiben, daß dies nur ein Notbehelf war; und nachdem schon einzelne meiner Schüler damit begonnen hatten, ihre eigenen Ausarbeitungen vervielfältigen zu lassen, um dem Bedürfnisse abzuhelfen, entschloß ich mich endlich selbst, meine Vorlesungen für den Druck zu bearbeiten.

Die Vorlesungen zerfallen in vier Teile, von denen der erste eine Einführung in die Mechanik bildet, während die drei übrigen die graphische Statik, die Festigkeitslehre und die Dynamik behandeln. Der erste Teil fällt in das zweite Studiensemester, darauf folgen die beiden nächsten Teile nebeneinander im dritten und schließlich der letzte Teil im vierten Studiensemester. Jeder dieser Teile soll bei der Veröffentlichung in einem besonderen Bande zur Darstellung kommen, der von den übrigen unabhängig ist. Dabei sollen indessen Wiederholungen so weit als tunlich vermieden werden. Wer nur einen dieser Bände zur Hand nimmt, wird daher manches vermissen, was sonst aufgenommen worden wäre, wenn der Band nicht durch die übrigen ergänzt werden sollte.

Bei der Verteilung des Stoffes auf die einzelnen Bände war nicht nur auf die Zahl der in jedem Semester zur Verfügung stehenden Vorlesungsstunden, sondern auch auf die bis zur gegebenen Zeit von den Studierenden bereits erreichte mathematische Vorbildung Rücksicht zu nehmen. Hiernach wird der erste Band nur geringe Ansprüche an die mathematischen Vorkenntnisse machen und jeder folgende allmählich höhere. Man wird auch schon innerhalb des jetzt vorliegenden Bandes bemerken, daß sich diese Ansprüche vom Anfange gegen das Ende hin steigern. — Die Studierenden der Architektur hören übrigens — von seltenen Ausnahmen abgesehen — nur die beiden ersten Teile der Mechanik, entsprechend den für die Zulassung zu den Staatsprüfungen vorgeschriebenen Bedingungen.

Verschiedene Gründe, von denen ich einen nachher noch erwähnen werde, haben mich veranlaßt, zuerst die Vorlesungen über Festigkeitslehre herauszugeben, also nicht mit dem ersten, sondern mit dem dritten Bande zu beginnen. Man verfügt

zwar gerade in der Festigkeitslehre schon über einige wertvolle Werke, die sich in ihrer ganzen Anlage nicht gar zu weit von meiner eigenen Arbeit entfernen. Daß aber die Herausgabe meiner Vorlesungen dadurch nicht überflüssig gemacht wurde, wird der kundige Leser bald genug herausfinden.

Bei der Ausarbeitung habe ich mich möglichst eng an das Vorlesungsheft angeschlossen. Von den Zwischenrechnungen, die sich bei der Ableitung der Formeln im Vortrage nötig machen, habe ich, um nicht zu weitläufig zu werden, soviel als anging, ohne das Verständnis zu erschweren, weggelassen; manche sind aber auch entweder ganz beibehalten oder doch durch entsprechende Andeutungen hinreichend gekennzeichnet. Freilich: den Besuch der Vorlesung selbst wird das Buch schwerlich ganz ersetzen können; in dieser Absicht ist es aber auch nicht geschrieben worden.

An einzelnen Stellen, so namentlich im letzten Abschnitte und auch bei einigen Übungsaufgaben, bin ich gelegentlich ein wenig über das, was ich in der Vorlesung selbst vorzubringen pflege, hinausgegangen. Es handelt sich dabei um Dinge, die nach meiner Meinung eigentlich besprochen werden sollten, die aber wegen Zeitmangel gewöhnlich wegfallen müssen. Sonst noch über das eigentliche Ziel der Vorlesung mit dem Buche hinauszugehen, hielt ich mit Rücksicht auf den Zweck der Bearbeitung für unzulässig. Wer sich das höchste Ziel — weit über die Bedürfnisse der technischen Praxis hinaus — stecken will, kann ein Studium der ausführlicheren Handbücher und der Quellen später doch nicht entbehren. Zur Vorbereitung auf das Studium auch der schwierigeren Schriften dürfte mein Buch aber jedenfalls ausreichen und das ist wohl alles, was man nach dieser Seite hin von ihm verlangen kann. Jenen, die diesen Weg einschlagen wollen, empfehle ich, nachdem sie sich mit meinem Buche hinreichend vertraut gemacht haben, zunächst das zweibändige Werk von Love, Treatise on the theory of elasticity, Cambridge 1892 und 1893, das viele Literaturangaben enthält und damit von selbst den weiteren Weg anzeigt.

In erster Linie wende ich mich mit dieser Veröffentlichung an die Hörer meiner Vorlesungen, denen ich damit beim Eindringen in den Gegenstand nach Kräften behilflich sein möchte. Ich denke indessen, daß das Buch auch den in der Praxis stehenden Ingenieuren, die das Differentiieren noch nicht ganz verlernt haben, von Nutzen sein kann. Freilich wird jetzt oft die Behauptung wiederholt, daß die Ingenieure in der Praxis nur noch die Elementarmathematik zu gebrauchen wüßten; in dieser Form vermag ich aber an die Behauptung nicht recht zu glauben. Nach meiner Schätzung ist die Elementarmathematik schwieriger zu erlernen und auch schwieriger im Gedächtnisse zu behalten, als jene einfachen Teile der Differential- und Integralrechnung, um die es sich bei den Anwendungen gewöhnlich handelt. Wer den Begriff des Differentialquotienten einmal richtig erfaßt hat, wird ihn schwerlich wieder vergessen, was mit den einfachen planimetrischen Sätzen z. B. viel leichter geschehen kann. Soviel Differentialrechnung als dazu nötig ist, um dem Gedankengange einer einfachen physikalischen Überlegung — und die grundlegenden physikalischen Überlegungen sind in diesem Sinne immer einfach — folgen zu können, glaube ich daher trotz alledem bei der Mehrzahl der in der Praxis stehenden Ingenieure, die überhaupt eine Hochschulbildung durchgemacht haben, getrost voraussetzen zu können. Wenn man solche Fragen erörtert, darf man nicht übersehen, daß sich nach deutschem Rechte jeder nach Gutdünken den Titel „Ingenieur“ beilegen darf; es bleibt daher, wenn von den Kenntnissen die Rede ist, die noch vorhanden sind, häufig die Frage offen, von welchem Ausgangszustande dieser Rest übrig blieb.

Zudem glaube ich dem in der Rechnung Ungeübten — falls er nur mit den Grundbegriffen überhaupt noch genügend vertraut ist — durch die vollständig durchgerechneten Übungsbeispiele in den Aufgaben die Benutzung des Buches erleichtert zu haben. Diese Aufgaben löse ich als Musterbeispiele auch in den Vorlesungen selbst; sie dienen in vielen Fällen nicht

nur zur Übung, sondern sind zugleich zu wesentlichen Ergänzungen des Textes bestimmt.

Freilich wird der Praktiker nicht nur durch die Differentialformeln, sondern mehr vielleicht noch durch das leidige Schlagwort von dem Gegensatze zwischen Theorie und Praxis von dem Studium solcher Bücher abgehalten. Diese Behauptung lasse ich aber auf dem Gebiete der technischen Mechanik durchaus nicht gelten; hier kann nur von einem Gegensatze zwischen falscher oder unvollständiger Theorie und der richtigen Theorie die Rede sein. Die richtige Theorie ist immer in Übereinstimmung mit der Praxis. — Daß mein Ziel bei der Bearbeitung der Mechanik ausschließlich die Erkenntnis der Wirklichkeit ist — was mit Recht gefordert werden darf — wird der Leser bald herausfinden. In der Tat sind die Lehren dieses Bandes keineswegs allein am Schreibtische zusammengestellt, sondern sie sind ganz wesentlich auf eigene Erfahrungen aufgebaut. Gerade bei der Bearbeitung der Festigkeitslehre sind mir die Ergebnisse sehr zahlreicher Versuche der verschiedensten Art, die ich während der letzten Jahre in dem mit meinem Lehrstuhle verbundenen Laboratorium anstellen konnte, erheblich zu statten gekommen und dies ist auch einer der Gründe, die mich dazu führten, diesen Teil des ganzen Werkes zuerst in Angriff zu nehmen.

Analytische Entwicklungen betrachte ich immer nur als ein Mittel zur Erkenntnis des inneren Zusammenhanges der Tatsachen. Wer auf sie verzichten wollte, würde das schärfste und zuverlässigste Werkzeug zur Verarbeitung der Beobachtungstatsachen aus der Hand geben. In der Tat gibt es auch heute kaum ein einziges Gebiet der Mechanik oder der Physik, das man ohne Benutzung der Hilfsmittel der höheren Rechnungsarten hinreichend zu beherrschen vermöchte.

München, im Oktober 1897.

A. Föppl.

Vorwort zur dritten Auflage.

Die im Jahre 1900 erschienene zweite Auflage dieses Bandes war durch eine Reihe von Zusätzen auf einen Umfang angewachsen, der mit dem bei der Abfassung dieses Lehrbuchs ursprünglich ins Auge gefaßten Ziele schon nicht mehr recht verträglich erschien. Auf diesem Wege durfte ich bei der Neubearbeitung für die dritte Auflage nicht weiter gehen, da ohnehin auch schon in dem engeren Rahmen, den ich mir jetzt gesteckt habe, die Hinzunahme einer Reihe von Ergänzungen und Erweiterungen unvermeidlich war. Um für diese Platz zu schaffen und zugleich noch die als dringend nötig angesehene Verminderung des Umfanges auf ein dem unmittelbaren Bedürfnisse besser als seither entsprechendes Maß vornehmen zu können, mußte ich mich daher zu weitgehenden Kürzungen entschließen.

Ich hoffe, daß es mir gelungen ist, durch die jetzt durchgeführte Beschränkung des Stoffes auf das, was man etwa in einer allgemeinen Vorlesung über Festigkeitslehre an einer technischen Hochschule im günstigsten Falle wirklich vortragen kann, die Brauchbarkeit des Buches durch größere Übersichtlichkeit zu erhöhen. Nicht geringer scheint mir dabei der Gewinn anzuschlagen zu sein, daß die Verminderung des Umfanges auch eine Herabsetzung des Preises gestatten wird.

Jenen Freunden meines Werkes, die sich noch über das Notwendigste hinaus, etwa im privaten Studium, zu unterrichten wünschen, soll aber die Gelegenheit dazu durch die vorgenommenen Abstriche keineswegs verkürzt werden. Vielmehr soll später in einem neu geplanten fünften Bande nicht nur das, was jetzt wegfällt, nachgeholt, sondern auch noch anderes hinzugefügt werden.

Abgesehen von der Änderung, die sich aus der Neubegrenzung des Stoffes ergab, habe ich auch sonst noch eine Umarbeitung vieler Stellen für erforderlich gehalten. Als

praktisch besonders wichtig erwähne ich in dieser Hinsicht, daß ich der Mohrschen Theorie der Bruchgefahr, die für die Festigkeitsberechnungen des Ingenieurs den Erfahrungstatsachen ohne Zweifel besser entspricht, als die übliche Annahme, bei der die Bruchgefahr nach der reduzierten Spannung bemessen wird, Eingang in die Praxis zu verschaffen versucht habe. Der Zweck des Buches gestattete mir natürlich nicht, die übliche Annahme außer acht zu lassen. Die reduzierten Spannungen sind vielmehr auch jetzt noch überall berechnet; daneben ist aber auf die in Wirklichkeit zutreffendere Abschätzung der Bruchgefahr nach Mohr überall, wo es darauf ankam, hingewiesen worden. Eine eingehendere Besprechung dieser Frage mußte übrigens aus den zuvor schon angeführten Gründen auf den fünften Band verschoben werden.

Allen, die mich durch Ratschläge oder gelegentliche Winke, die ich bei der Neubearbeitung verwenden konnte, unterstützt haben, so namentlich Herrn Kollegen Sommerfeld in Aachen, möchte ich auch an dieser Stelle meinen besten Dank aussprechen.

München, im Februar 1905.

A. Föppl.

Inhaltsübersicht.

Erster Abschnitt.

Allgemeine Untersuchungen über den Spannungszustand.

§ 1. Aufgabe der Festigkeitslehre.

Bei vielen Untersuchungen der Mechanik genügt es, die festen Körper als durchaus unveränderlich oder als starr zu betrachten. In anderen Fällen aber, mit denen wir uns hier zu beschäftigen haben, reicht dieser Grad der Annäherung an das wirkliche Verhalten der in der Natur vorkommenden festen Körper nicht aus.

Man kann diese Fälle in zwei Gruppen einteilen. Bei der ersten Gruppe handelt es sich um die Entscheidung der Frage, ob sich ein gegebener Körper unter gewissen Umständen in der Tat ungefähr wie ein starrer verhalten wird oder ob man im Gegenteile größere Formänderungen oder einen Bruch zu erwarten hat. Aufgaben von dieser Art werden häufig zur Festigkeitslehre „im engeren Sinne“ gerechnet.

Die zweite Gruppe wird von jenen Fällen gebildet, bei denen man schon vorher weiß, daß der betrachtete Körper gegen größere Formänderungen oder gegen Bruch widerstandsfähig genug ist, um ihn annähernd als starr betrachten zu können, bei denen aber trotzdem die Lehren der Mechanik starrer Körper nicht ausreichen, gewisse Fragen, die sich anscheinend ganz innerhalb ihres eigenen Gebiets bewegen, zu beantworten. Einfache Beispiele dafür sind folgende. Ein Balken, der auf zwei Stützen aufruht, überträgt auf diese, wenn er belastet ist, Auflagerkräfte, die sich nach den Lehren

der Mechanik starrer Körper berechnen lassen. Das ist aber nicht mehr möglich, wenn der Balken an drei Stellen gestützt ist. Ebensowenig vermag man anzugeben, wie groß der Druck ist, den jedes Bein eines beliebig belasteten vierbeinigen Tisches auf den Boden ausübt, wenn man von der in diesem Falle nicht zutreffenden Voraussetzung ausgeht, daß es genüge, den Tisch als starren Körper zu betrachten. Zu ähnlichen Schwierigkeiten gelangt man bei der Untersuchung des Stoßes der Körper, wenn man diese als starr ansieht.

Früher, als man noch annahm, daß bei manchen Körpern, z. B. bei den Bausteinen, das Bild des starren Körpers zur Beschreibung ihres Verhaltens genügen müsse, hat man sich öfters bemüht, die scheinbar vorhandene Lücke der Mechanik starrer Körper durch Aufstellung besonderer Gesetze (z. B. des sogenannten Gesetzes des kleinsten Widerstandes in der Gewölbetheorie) zu schließen, ohne von dem Bilde des starren Körpers abzuweichen. Heute weiß man, daß diese Bemühungen verfehlt waren. Es gibt keine Körper in der Natur, die wirklich starr wären. Alle vermögen ihre Form etwas zu ändern, ohne deshalb sofort zu zerbrechen, und alle Fragen, auf die man bei der früheren Anschauung keine Antwort zu geben vermochte, finden ihre Lösung, sobald man auf diese Eigenschaft der Naturkörper Rücksicht nimmt.

Aus jener Zeit, in der man sich über diesen Punkt noch nicht klar geworden war, stammt auch die Bezeichnung jener Aufgaben. Man nennt auch heute noch solche Aufgaben statisch unbestimmt, bei denen kein Zweifel darüber erhoben werden kann, daß die Körper nur geringe Gestaltänderungen erfahren, daß sie sich also auf den ersten Anschein wie starre verhalten werden, bei denen aber trotzdem die Mechanik der starren Körper zur Lösung nicht ausreicht.

Mit der zuerst genannten Gruppe von Fällen teilt diese zweite Gruppe die Eigentümlichkeit, daß man auf die Gestaltänderungen, wenn sie auch noch so klein seien, Rücksicht nehmen muß, um zu einer Lösung zu gelangen. Beide Gruppen werden daher am besten gemeinsam untersucht. Man macht

zwar, wie schon bemerkt, öfters insofern einen Unterschied, als man nur die Fälle der ersten Gruppe der eigentlichen Festigkeitslehre, die der zweiten Gruppe der „Theorie der Elastizität“ zuweist. Ich werde aber von einer solchen Unterscheidung hier vollständig absehen. Unter der Festigkeitslehre im weiteren Sinne verstehe ich vielmehr ganz allgemein jenen Teil der Mechanik fester Körper, bei dem auf die Betrachtung der gewöhnlich nur sehr kleinen Formänderungen dieser Körper eingegangen wird. „Fest“ steht daher hier ausdrücklich im Gegensatze zu „starr“, braucht aber darum noch nicht mit „elastisch“ zusammenzufallen. Die Untersuchung des Verhaltens eines plastischen Körpers, also etwa eines Klumpens aus knetbarem Tone, würde vielmehr auch als eine Aufgabe der Festigkeitslehre aufzufassen sein. Freilich hat man sich mit solchen Fällen bisher nur wenig beschäftigt, — offenbar nur deshalb, weil keine zwingende Veranlassung dazu vorlag. Eine Ausnahme bildet nur die Theorie des Erddrucks, die im fünften Bande eine kurze Besprechung erfahren wird.

§ 2. Die inneren Kräfte.

Durch die kleine Formänderung, die ein Körper an irgend einer bestimmten Stelle unter dem Einflusse der Belastung erfährt, werden an dieser Stelle innere Kräfte wachgerufen, die die Formänderung wieder rückgängig zu machen suchen und sich ihrer Vergrößerung widersetzen. Man ist daher genötigt, bei allen Aufgaben der Festigkeitslehre, zu welcher Gruppe sie nun auch gehören mögen, sowohl in eine Untersuchung der Formänderung als auch in eine Untersuchung des mit ihr verbundenen Spannungszustandes einzutreten. Will man die zuletzt genannte Seite der Betrachtung besonders hervorheben, so kann man die Festigkeitslehre auch als die Mechanik der inneren Kräfte bezeichnen. Man darf dabei freilich nicht vergessen, daß die vollständige Lösung aller bei der Behandlung der inneren Kräfte auftretenden Fragen ohne Berücksichtigung der damit verbundenen Formänderung

ebensowenig möglich ist, wie eine Untersuchung der Formänderung ohne Betrachtung der dazu gehörigen inneren Kräfte. Einige der wichtigsten Gesetzmäßigkeiten, denen die inneren Kräfte unterworfen sind, lassen sich indessen auch schon ohne nähere Erörterung der Formänderung behandeln und mit ihnen haben wir uns in diesem ersten Abschnitte vorwiegend zu beschäftigen.

Wenn auch die Festigkeitslehre mit anderen Aufgaben zu tun hat und andere Verfahren anwendet, wie die Statik starrer Körper, so steht sie darum doch nicht im Gegensatze zu dieser. Die Festigkeitslehre stützt sich vielmehr auf die Mechanik starrer Körper und ergänzt deren Lehren nur so weit, als nötig ist, um das wirkliche Verhalten der festen Körper in der Natur zu beschreiben. Wenn nämlich auch die Mechanik starrer Körper nur einen Teil des ganzen Erfahrungsgebietes umfaßt, so gelten doch ihre Lehren innerhalb ihres Bereichs genau für alle Körper, auch wenn sie an sich nicht starr sind. Für die Anwendung dieser Lehren genügt es stets, wenn sich der Körper nur im gegebenen Falle so verhält, als wenn er starr wäre. Dies trifft namentlich zu, wenn der ganze Körper ruht, denn die Ruhe des ganzen Körpers und hiermit aller Teile, aus denen er besteht, schließt in sich, daß keine Gestaltänderung eintritt, daß sich also der Körper wenigstens während der Zeit, in der wir ihn betrachten, so wie ein starrer verhält. Wir brauchen daher, um von der Statik starrer Körper Gebrauch machen zu können, nur abzuwarten, bis sich die Formänderung, die ein Körper unter einer Belastung erfuhr, vollzogen hat und der Körper wieder zur Ruhe gelangt ist.

Der wichtigste Grundsatz, von dem die Festigkeitslehre ausgeht, läßt sich in die Worte fassen: Jeder Teil eines Körpers, wie er auch in Gedanken aus diesem abgegrenzt werden möge, ist selbst wieder als ein Körper anzusehen, auf den sich die allgemeinen Sätze der Mechanik anwenden lassen. Mancher wird vielleicht geneigt sein, diesen Grundsatz einfach als selbstverständlich hinzunehmen. Er ist es auch ohne Zweifel, wenn man die

Trennung nicht nur in Gedanken, sondern in Wirklichkeit vornimmt. Er soll aber nicht nur auf wirkliche Bruchstücke angewendet werden, sondern auch auf Teile des Körpers, die dauernd mit dem Reste verbunden bleiben und die wir nur deshalb für sich genommen betrachten, weil wir dadurch Aufschlüsse über das Verhalten des ganzen Körpers zu gewinnen suchen. In dieser Form kann der Satz nur als ein Erfahrungsgesetz hingestellt werden, zu dessen Rechtfertigung es vollständig genügt, daß es sich bisher unter allen Umständen unbedingt bewährt hat.

In der Mechanik der starren Körper wird in der Regel nur auf die äußeren Kräfte geachtet, also auf jene, die von anderen Körpern her auf den gegebenen einwirken. Bei allen Sätzen, die für das Gleichgewicht solcher Körper aufgestellt sind, kommen die inneren Kräfte, die den Zusammenhang des Körpers aufrecht erhalten, überhaupt nicht vor. Sobald wir nun einen beliebig abgegrenzten Teil des Körpers zum Gegenstande unserer Untersuchung machen, müssen wir beachten, daß Kräfte, die zwischen diesem Teile und dem Reste des Körpers auftreten, zwar für den ganzen Körper immer noch als innere, für jenen Teil — oder auch für den Rest — aber als äußere aufzufassen sind. Wir werden uns also, um die Sätze der gewöhnlichen Statik auf das Gleichgewicht eines Teiles des Körpers anwenden zu können, vor allen Dingen zu fragen haben, von welcher Art die Kräfte sein können, die zwischen dem Teile und dem Reste des Körpers wirken.

Zu diesem Zwecke erinnern wir uns daran, daß die irdischen Körper, die wir untersuchen, in der Regel nur dann Kräfte von meßbarer Größe aufeinander übertragen, wenn sie miteinander in Berührung kommen. Ausnahmsweise kommen allerdings auch Kräfte vor, die dem Anscheine nach ohne vermittelndes Bindeglied in die Ferne wirken. Wenn wir also z. B. einen Teil eines Magneten betrachten, müssen wir auch auf die magnetischen Fernkräfte achten, die von dem Reste auf das betrachtete Stück übertragen werden und an diesem Stücke als äußere Kräfte auftreten. Mit solchen Fällen hat

man sich aber nur ganz ausnahmsweise zu beschäftigen und wir wollen daher, um die Betrachtung nicht verwickelter zu machen, als es in der Regel nötig ist, weiterhin ganz von ihnen absehen.

Wenn dies geschieht, bleiben zwischen einem gegebenen Teile eines Körpers und dem Reste nur solche Kräfte übrig, die mit den Druckkräften bei der Berührung verschiedener Körper zu vergleichen sind, die also ihren Sitz (d. h. ihre Angriffspunkte) an den Grenzflächen zwischen beiden Teilen haben. Freilich ist hier von vornherein darauf zu achten, daß diese Kräfte nicht notwendig Druckkräfte zu sein brauchen, sondern auch Zugkräfte sein können oder überhaupt jede beliebige Richtung und Größe haben können, da ein fester Körper nicht nur einer Annäherung, sondern auch einer Entfernung seiner einzelnen Teile und überhaupt jeder Formänderung einen Widerstand entgegensetzt.

Diese in den gedachten Grenzflächen übertragenen Kräfte bezeichnet man als Spannungen des Körpers. Da man sich auf jede beliebige Weise einen Teil des Körpers von dem Reste abgegrenzt denken kann, vermag man die Spannung an jeder Stelle und nach jeder Richtung hin als äußere Kraft an einem Teile des Körpers aufzufassen. Dadurch werden alle Spannungen der Untersuchung zugänglich und aus den Gleichgewichtsbedingungen, die für jedes beliebig abgegrenzte Körperelement erfüllt sein müssen, folgen sofort die Beziehungen zwischen den Spannungen nach verschiedenen Richtungen und an verschiedenen Stellen des Körpers, die zur Grundlage für alle weiteren Untersuchungen dienen müssen.

Wird ein Stück des Körpers so abgegrenzt, daß seine Oberfläche mit der Oberfläche des ganzen Körpers zum Teile zusammenfällt (also so, daß das Stück nicht ganz aus dem Innern des Körpers herausgeschnitten ist), so treten an diesen Stellen keine Spannungen auf, dagegen können hier Druckkräfte von außen, also von anderen Körpern her übertragen werden. Die äußeren Kräfte müssen im Gleichgewichte mit den an den übrigen Teilen der Oberfläche des Körperstücks

(also an den Schnittflächen) übertragenen Spannungen und mit den etwa auf die Masse des Körperstücks selbst wirkenden Fernkräften stehen. Da die äußeren Kräfte gewöhnlich als gegeben angesehen werden können, erhält man durch diese Gleichgewichtsbedingung ein Mittel, um die Größe der Spannungen unter gewissen Umständen zu berechnen.

§ 3. Die spezifische oder bezogene Spannung.

Wir betrachten zunächst den in Abb. 1 dargestellten Fall einer Zugstange, die durch die an beiden Enden angreifenden Kräfte P in Spannung versetzt wird. Denkt man sich durch einen Schnitt mm den links davon liegenden Teil des Körpers von dem Reste abgetrennt, so erfordert die Gleichgewichtsbedingung für diesen Teil, daß im Schnitte mm Spannungen übertragen werden, deren Resultierende gleich P ist und in die Richtung der Stabmittellinie fällt.

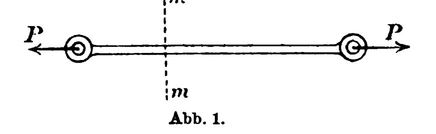


Abb. 1.

Freilich kennt man damit zunächst nur die gesamte durch die Schnittfläche mm übertragene Spannkraft, und man weiß noch nicht, wie sie sich auf die einzelnen Teile des Querschnitts verteilt. So lange man den Körper, was bisher immer noch zulässig war, als starr ansieht, fehlt in der Tat jedes Mittel, um selbst für diesen einfachsten Fall der Zugbeanspruchung einen Anhaltspunkt für die Verteilung der Spannungen über den Querschnitt zu finden. Die Aufgabe ist statisch unbestimmt, genau in demselben Sinne wie jene über die Druckverteilung auf die vier Beine eines Tisches, von der vorher die Rede war.

Wenn die Stange wirklich starr wäre, hätte es allerdings auch kaum ein Interesse, näheres über die Verteilung der Spannungen im Querschnitte zu erfahren, da sie für das physikalische Verhalten des Körpers ganz belanglos wäre. Der Widerstand, den ein Körper dem Zerreißen entgegenzusetzen

vermag, ist aber immer nur begrenzt. Wenn ein Bruch eintritt, ist von vornherein nicht zu erwarten, daß dieser sich gleichzeitig über den ganzen Querschnitt erstrecke. Er kann auch an einer Stelle, an der die günstigsten Bedingungen dafür vorliegen, beginnen und sich dann erst über die übrigen Stellen ausbreiten. Um ein Urteil darüber zu erhalten, ob bei einer bestimmten Belastung ein Bruch zu erwarten ist, müssen wir daher näheres über die Verteilung der gesamten Spannung über den Bruchquerschnitt zu erfahren suchen.

Dazu kann uns nur eine Untersuchung der Formänderungen verhelfen, die dem Bruche vorausgehen. Denn diese hängen in bestimmter Weise mit der Verteilung der Spannungen zusammen. Die Art dieses Zusammenhanges wird durch die besonderen Eigenschaften des belasteten Körpers bedingt und kann nur auf Grund der Erfahrung festgestellt werden. Wenn der Körper elastisch ist und der Schnitt mm von den Enden der Stange weit genug entfernt ist, läßt sich erwarten und findet sich auch durch den Versuch bestätigt, daß die elastische Dehnung in der Richtung der Stabachse für alle Punkte des Querschnitts mm ungefähr konstant ist, und daß dasselbe daher auch für die Spannungen zutrifft. Man findet dann, wieviel Spannung in der Flächeneinheit des Querschnitts übertragen wird, wenn man die ganze Kraft P durch die Maßzahl des Querschnitts F dividiert. Die in dieser Weise berechnete Spannung für die Flächeneinheit

$$\sigma = \frac{P}{F} \tag{1}$$

wird die spezifische oder bezogene (nämlich die auf die Flächeneinheit bezogene) Spannung*) genannt. Es hängt von dem Stoffe ab, aus dem die Zugstange besteht, wie groß die bezogene Spannung werden darf, ohne daß die Gefahr eines Bruches nahe gerückt ist. Die Berechnung der bezogenen

*) Ich habe hier, wie schon in der 3. Auflage des ersten Bandes, den Versuch gemacht, das sprachlich schlecht gebildete Fremdwort „spezifisch“ durch das dem Sinne nach viel besser zutreffende Eigenschaftswort „bezogen“ zu ersetzen.

Spannung ist daher in allen solchen Fällen eine der wichtigsten Aufgaben der Festigkeitslehre.

Nicht immer darf man indessen darauf vertrauen, daß diese einfachste, gleichförmige Verteilung der Spannungen eintritt. Ein wichtiges Beispiel dafür liefert die Prüfung von Zementkörpern auf Zugfestigkeit. Um einen Zement auf seine Zugfestigkeit zu prüfen, pflegt man einen Gewichtsteil mit drei Gewichtsteilen einer besonderen Sandsorte (sog. Normalsande) zu mischen, eine bestimmte Menge Wasser zuzusetzen, das Ganze gehörig durchzuarbeiten und den erhaltenen Mörtel in eine Metallform zu bringen, in der er durch Schläge eines (gewissen vereinbarten Anforderungen entsprechenden) Schlagwerks stark zusammengedrückt wird. Der so erhaltene Probekörper von der in Abb. 2 angegebenen Gestalt wird dann später, nachdem er erhärtet ist, in eine Maschine gebracht, in der der Körper von zwei Zangen erfaßt und durch eine abgewogene Belastung P abgerissen wird. Der Bruch erfolgt zwischen den Linien aa und bb in Abb. 2. Auch in diesem Falle pflegt man allerdings gewöhnlich die Festigkeit des Zements nach Gleichung (1) zu berechnen. Man erhält aber dabei nur einen Durchschnittswert der bezogenen Spannung σ für den gangen Bruchquerschnitt und bleibt im Unklaren darüber, wie groß die bezogene Spannung an jener Stelle ist, an der der Bruch beginnt. Um sich davon zu überzeugen, daß diese viel höher ist, als der nach Gl. (1) berechnete Durchschnittswert, genügt es, ein Stück von derselben Gestalt aus Kautschuk herzustellen und dieses in derselben Weise auf Zug zu beanspruchen, wie es mit dem Zementkörper bei der Prüfung geschieht. Zieht man auf einer der ebenen Seitenflächen zwei feine Linien aa und bb, so bemerkt man, daß die Dehnung in der Nähe der Kanten viel größer wird als in der Mitte. Die vorher geraden Linien aa und bb werden etwas gekrümmt und zwar so, daß sie sich ihre konvexen Seiten zukehren. Bei einem Versuche, den ich in dieser Weise ausführte, wobei ich die Dehnungen zwischen aa und bb in verschiedenen Abständen von der Mitte mit dem Mikroskope maß, fand ich, wenn die Dehnung in 11,5 mm Abstand von der Mitte, d. h. in $^1/_2$ mm Abstand von der Kante gleich 100 gesetzt wird,

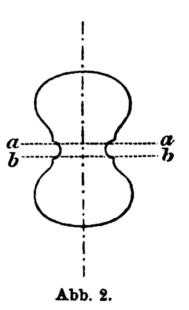


Abb. 2.

im Abstande von der Mitte	=	0	4	8	11,5 mm
die Dehnungen	=	24	34	53	100.

Die Dehnung an der Kante ist also mehr als viermal so

groß als jene in der Mitte und daraus folgt, daß jedenfalls auch die Spannung in der Nähe der Kante viel größer ist als in der Mitte.

Bei einem Zementkörper sind die elastischen Dehnungen, die dem Bruche vorausgehen, weit geringer als bei einem Kautschukkörper und daher einer unmittelbaren Messung, wenigstens bei so kleinen Körpern, wie sie zu den üblichen Festigkeitsprüfungen hergestellt werden, nicht zugänglich. Jedenfalls wissen wir aber aus anderen Versuchen, daß auch Zementkörper vor dem Bruche Dehnungen erfahren, die der Art nach in ganz ähnlicher Weise mit den Spannungen zusammenhängen, wie bei dem Kautschuk. Wir müssen daher schließen, daß der Vorgang der elastischen Dehnung, wenn auch die absoluten Beträge viel kleiner sind, als beim Kautschuk, doch im ganzen ein ähnliches Gesetz befolgt, wie bei dem vorher beschriebenen Versuche. Freilich kann man aus den Ergebnissen dieses Versuches nicht unmittelbar erkennen, in welcher Weise sich die Spannung bei einem Zementkörper in Wirklichkeit genau über den Querschnitt verteilt. Darüber kann man sich auf andere Art ein Urteil verschaffen. Hier kommt es aber nur darauf an, zu zeigen, erstens mit welcher Vorsicht man bei der Berechnung der Spannungen verfahren muß, und zweitens, daß ein zuverlässiges Urteil über die Art der Spannungsverteilung immer erst aus einer Untersuchung der damit verbundenen Formänderung des Körpers gewonnen werden kann.

Mit der eigentlichen Berechnung der Spannungen haben wir es an dieser Stelle noch nicht zu tun. Ich habe diese Betrachtungen nur angestellt, um den Begriff der bezogenen Spannung in das rechte Licht zu setzen. Wenn eine gleichförmige Verteilung der Spannungen über eine größere Fläche nicht zu erwarten ist, müssen wir, um die bezogene Spannung an einer bestimmten Stelle dieser Fläche zu erhalten, einen kleinen Teil ΔF der Fläche an dieser Stelle abgrenzen und jenen Teil ΔP der ganzen Kraft P, der in ΔF übertragen wird, nach Gl. (1) durch ΔF dividieren. Wir erhalten dann den Durchschnittsbetrag von σ für die Fläche ΔF und dieser fällt um so genauer mit dem Werte von σ an der ins Auge gefaßten Stelle zusammen, je kleiner wir ΔF wählen. Als Definition der bezogenen Spannung an einem bestimmten Punkte des Querschnitts haben wir daher bei ungleichförmiger Spannungsverteilung den Grenzwert

$$\sigma = \lim \frac{\Delta P}{\Delta F} = \frac{dP}{dF} \tag{2}$$

anzusehen, woraus auch umgekehrt

$$dP = \sigma dF \tag{3}$$

folgt.

Bisher setzte ich in Anlehnung an das einfache zur Erläuterung gewählte Beispiel stillschweigend voraus, daß die Spannungen σ senkrecht zum gewählten Querschnitte gerichtet seien. Im allgemeinen ist dies aber keineswegs der Fall. Wenn die in einem Flächenelemente dF übertragene Kraft irgend einen Winkel mit der Normalen zu dF bildet, können wir uns die Kraft und daher auch die bezogene Spannung in zwei Komponenten zerlegt denken, von denen eine in die Richtung der Normalen, die andere in die Fläche dF selbst fällt. Die erste heißt Normalspannung und zwar Zug- oder Druckspannung, je nachdem sie einer Entfernung oder einer Annäherung der beiden Teile des Körpers, zwischen denen der Schnitt gelegt ist, widerstrebt, und die andere die Schubspannung. Für jene werde ich den Buchstaben σ, für diese den Buchstaben τ gebrauchen. Wenn das Flächenelement gegeben ist, wird die in ihm übertragene Normalspannung vollständig durch die Angabe der Größe von σ und eines Vorzeichens beschrieben, durch das zwischen Zug- und Druckspannung unterschieden wird. Ich werde den Zugspannungen stets das positive Vorzeichen geben. Zur Beschreibung der Schubspannung muß dagegen noch eine nähere Angabe über die Richtung von τ in der Fläche dF gemacht werden. Gewöhnlich ist es am bequemsten, zu diesem Zwecke auf der Fläche dF zwei zueinander senkrechte Richtungen zu ziehen und τ in zwei Komponenten nach diesen beiden Richtungen zu zerlegen. Im ganzen ist dann die Angabe von drei Komponenten erforderlich, um die durch die Fläche dF übertragene Spannung zu kennzeichnen.

Es wäre freilich ein Irrtum, wenn man annehmen wollte, daß der Spannungszustand des Körpers an der fraglichen Stelle durch die Angabe dieser drei Komponenten vollständig fest-

gesetzt wäre. Dies ist keineswegs der Fall: um vollständig darüber unterrichtet zu sein, müssen wir diese Komponenten nicht nur für die Fläche dF, sondern auch für jedes andere Flächenelement anzugeben vermögen, das in beliebiger Stellung durch den gegebenen Punkt des Körpers gelegt werden kann.

Auf den ersten Blick erscheint es nun, als wenn dazu unendlich viele Angaben erforderlich wären. Man überzeugt sich aber leicht, daß es schon vollständig genügt, wenn man die Spannungskomponenten für drei verschiedene Stellungen von dF anzugeben vermag; für jedes vierte Flächenelement, das man durch den gegebenen Punkt legen mag, ist die Spannung dadurch schon mitbestimmt. Um dies zu erkennen, denke man sich ein unendlich kleines Tetraeder aus dem Körper abgegrenzt, so daß der gegebene Punkt etwa die eine Ecke dieses Tetraeders bildet. Dieses Tetraeder sei der Teil des Körpers, auf den wir nach unserem gewöhnlichen Verfahren die Gleichgewichtssätze der Statik in Anwendung bringen wollen. Außerdem sollen die drei an den gegebenen Punkt angrenzenden Flächen in jenen Stellungen gezogen sein, für die wir die Spannungskomponenten bereits als gegeben betrachten, während die vierte Fläche ganz beliebige Stellung haben kann. Diese vierte Fläche geht nun zwar nicht durch den gegebenen Punkt und bei einigem Abstande von ihm wird auch die Spannung, die durch sie übertragen wird, etwas verschieden sein von der Spannung einer parallel zu ihr durch den gegebenen Punkt gelegten Fläche, die wir eigentlich berechnen wollen. Wenn wir uns aber die Kanten des Tetraeders immer mehr verkleinert denken und die vierte Fläche dadurch dem Punkte immer näher rücken, wird der Unterschied immer mehr abnehmen und in der Grenze ganz verschwinden. Dies ist der Grund, weshalb wir uns das Tetraeder unendlich klein denken müssen, denn im anderen Falle könnten wir offenbar auch die Gleichgewichtsbedingungen für ein Tetraeder von endlicher Kantenlänge mit demselben Erfolge untersuchen. In der Tat muß hier schon allgemein gesagt werden, daß es

in der Festigkeitslehre sehr oft zulässig ist, sich jene Körper, die als unendlich klein bezeichnet werden, auch in endlichen Abmessungen vorzustellen, ohne daß dadurch der Genauigkeit der Betrachtung ein erheblicher Abbruch geschehen würde. Im einzelnen Falle wird man sich immer leicht ein Urteil darüber verschaffen können, wie klein man die Kantenlängen mindestens wählen muß, ohne einen merklichen Fehler dadurch zu begehen, daß sich der betrachtete Spannungszustand etwas ändert, wenn man von der gegebenen Stelle um ein endliches Stück abrückt.

An dem vorgelegten Tetraeder wirken nun fünf äußere Kräfte, die im Gleichgewichte miteinander stehen müssen, nämlich die Spannungen, die auf den vier Seitenflächen übertragen werden, und die Fernkraft, die von außen her auf die Masse des Tetraeders einwirkt. Bei den gewöhnlichen Anwendungen der Festigkeitslehre wird diese nur durch das Gewicht des Tetraeders gebildet. Will man Schwingungsbewegungen oder überhaupt Bewegungen untersuchen, die der Körper ausführt, so kommt noch eine Kraft hinzu, die man, wie im vierten Bande näher auseinandergesetzt werden wird, nach dem d'Alembertschen Prinzipe anbringen muß, also z. B. eine Zentrifugalkraft — oder allgemein eine sogenannte Trägheitskraft — um den Fall der Bewegung auf den Gleichgewichtsfall zurückzuführen.

Wie dies aber auch sein möge, jedenfalls ist die an der Masse des Tetraeders unmittelbar angreifende Kraft dem Volumen des Tetraeders proportional, während die Spannungen an den Seitenflächen den Flächeninhalten proportional sind. Nun haben wir vorher schon gesehen, daß wir uns, um genauere Resultate zu erhalten, die Abmessungen des Tetraeders immer mehr verkleinert denken müssen, so daß sie in der Grenze zu Null werden. Bei dieser Verkleinerung nimmt aber das Volumen viel schneller ab, als die Inhalte der Seitenflächen, da jenes der dritten, diese aber nur der zweiten Potenz der Längen proportional sind. Durch hinreichende Verkleinerung werden wir es also immer dahin bringen können, daß die

dem Volumen proportionale Kraft gegenüber den Spannungen an den Seitenflächen ganz unmerklich wird.

Wir haben es hier mit einer Überlegung zu tun, die überall anwendbar ist, wo der Einfluß von Kräften, die den Massen proportional sind, mit dem verglichen werden soll, der von Oberflächenkräften herrührt. So wird z. B. ein kleiner Stein im fließenden Wasser leicht fortgerissen, während ein ihm geometrisch ähnlicher von großen Abmessungen unter den gleichen Bedingungen liegen bleibt, weil der Wasserdruck nur mit der zweiten Potenz, das Gewicht des Steins aber mit der dritten Potenz der Längen abnimmt. Derselbe Grund bedingt auch, daß ein Elefant im allgemeinen schwerfälliger sein muß, als ein Tier von geringer Körpergröße, denn das Eigengewicht, mit dem der Elefant bei seinen Bewegungen zu tun hat, steht bei ihm in einem ungünstigeren Verhältnisse zu den Querschnitten der Muskeln, durch die die bewegende Kraft übertragen wird.

Übrigens ist in der Tat bei den gewöhnlichen Anwendungen der Festigkeitslehre das Eigengewicht des vorher betrachteten Tetraeders selbst dann schon gewöhnlich ganz unmerklich, wenn die Kantenlängen noch nach Zentimetern zählen. Das Eigengewicht des Tetraeders berechnet sich dann auf Gramme, während die Spannungen an den Seitenflächen sich oft genug auf tausende von Kilogrammen belaufen. Um die Spannungen an solchen kleinen Stücken unmittelbar miteinander zu vergleichen, braucht man daher in erster Annäherung auf das Eigengewicht keine Rücksicht zu nehmen. Erst dann, wenn man etwa auf sehr kleine Unterschiede achten will, die dadurch bedingt werden, daß man um ein kleines Stück in einer gewissen Richtung weiter geht, wird es nötig, auch auf die den Massen proportionalen Kräfte zu achten.

Mit Rücksicht auf diese Erwägungen bleibt daher nur noch das Gleichgewicht der Spannungen an den vier Seitenflächen des Tetraeders für sich genommen zu untersuchen. Das Gleichgewicht erfordert, daß die geometrische Summe dieser vier Spannungen gleich Null ist. Wenn drei Spannungen gegeben sind, folgt daher Größe und Richtung der vierten durch Zeichnen eines windschiefen Kräftevierecks oder nach

dem Satze vom Parallelepiped der Kräfte oder nach irgend einer anderen Methode der gewöhnlichen Statik.

Die genannte Bedingung genügt freilich noch nicht, um das Gleichgewicht eines Körpers unter der Wirkung dieser vier Kräfte sicher zu stellen. Dazu gehört noch, daß sich die vier Richtungen entweder in einem Punkte schneiden oder daß wenigstens auf andere Art auch ein Gleichgewicht gegen Drehung gesichert ist. Dies weist uns darauf hin, daß schon die Spannungen auf drei gegebenen Flächenelementen dF gewisse Bedingungen erfüllen müssen, wenn sie überhaupt miteinander verträglich sein sollen. Man kann diese Bedingungen für das Tetraeder ableiten, indem man Momentengleichungen anschreibt. Wir wollen aber dazu einen bequemeren Weg wählen, indem wir an Stelle des Tetraeders ein unendlich kleines Parallelepiped betrachten.

§ 4. Gleichgewichtsbedingungen zwischen den Spannungskomponenten.

Wir sahen vorher, daß der Spannungszustand, in dem sich der Körper an einer gewissen Stelle befindet, durch Angabe der Spannungskomponenten für drei beliebige Flächenelemente von verschiedener Stellung, die man durch den gegebenen Punkt legen kann, eindeutig beschrieben wird. Es steht uns frei, diese Flächenelemente so auszuwählen, wie es für die weitere Untersuchung am bequemsten ist. Dieser Umstand weist uns von selbst auf die Benutzung eines rechtwinkligen Koordinatensystems hin. In der Festigkeitslehre wird nicht viel damit gewonnen, wenn man an Stelle von Koordinaten oder Komponenten mit den gerichteten Größen selbst rechnet, was in den meisten übrigen Teilen der Mechanik von Vorteil ist. Ich werde daher hier überall der ohnehin bekanntesten Cartesischen Methode, der Untersuchung mit Koordinaten und Komponenten den Vorzug geben und nur ganz gelegentlich einmal auf die andere Art der Darstellung hinweisen.

In Abb. 3 sei O der Punkt des Körpers, für den der Spannungszustand untersucht werden soll. Er möge die Ecke

eines unendlich kleinen Parallelepipeds bilden, dessen aufeinander senkrecht stehende Kanten in die Richtungen der Koordinatenachsen OX, OY, OZ gelegt sind. Unendlich klein müssen wir uns das Parallelepiped wieder deshalb denken, weil sonst die Spannungen an verschiedenen Stellen der von O ausgehenden Seitenflächen merklich von einander abweichen könnten. So aber können wir ohne in Betracht kommenden Fehler annehmen, daß die Spannungen über jede Seitenfläche gleichmäßig verteilt sind. Die Resultierende der Spannungen für jede Seitenfläche geht dann auch durch deren Schwerpunkt, also durch die Mitte, und die Größe ist nach Gleichung (3) gleich dem Produkte aus der bezogenen Spannung für die betreffende Flächenstellung und dem Inhalte des Rechtecks.

Die Normalspannungen gehen auf allen Seitenflächen schon von selbst in den Richtungen der Koordinatenachsen, und auch die Schubspannungen wollen wir uns an jeder Fläche in zwei Komponenten zerlegt denken, die in die Richtungen der Koordinatenachsen fallen. Wir haben dann an den sechs Seitenflächen des abgegrenzten Körperstücks zusammen 18 Spannungskomponenten, deren Gleichgewicht zu untersuchen ist, denn in erster Annäherung brauchen wir aus den in § 3 auseinandergesetzten Gründen auf die Massenkraft, die sonst noch dazu käme, nicht zu achten.

Wir müssen uns zunächst darüber klar werden, in welchen Beziehungen die Spannungen auf zwei gegenüberliegenden Seitenflächen des Parallelepipeds zueinander stehen. In jeder Trennungsfläche, die wir uns in einem Körper gezogen denken können, grenzen zwei Teile des Körpers aneinander, zwischen denen sich die Spannungen durch die Trennungsfläche übertragen. Nach dem Gesetze der Wechselwirkung ist die Kraft, die etwa A auf B überträgt, ebenso groß, aber entgegengesetzt gerichtet wie die Kraft, die von B auf A wirkt. Wir wollen uns, um beide Teile deutlich voneinander unterscheiden zu können, eine Normale zur Trennungsfläche nach einer der beiden möglichen Richtungen gezogen denken. Für den einen Teil geht diese Normale dann nach außen hin und für den

anderen nach innen. Eine Zugspannung ist für jeden der beiden Teile eine Kraft, deren Pfeil mit der Richtung der äußeren Normale dieses Teiles übereinstimmt. Betrachten wir nämlich den anderen Teil, so kehrt sich nach dem Wechselwirkungsgesetze der Pfeil der übertragenen Spannung um, gleichzeitig ist aber nun die entgegengesetzte Richtung der Normalen als die äußere zu bezeichnen, und wir können daher

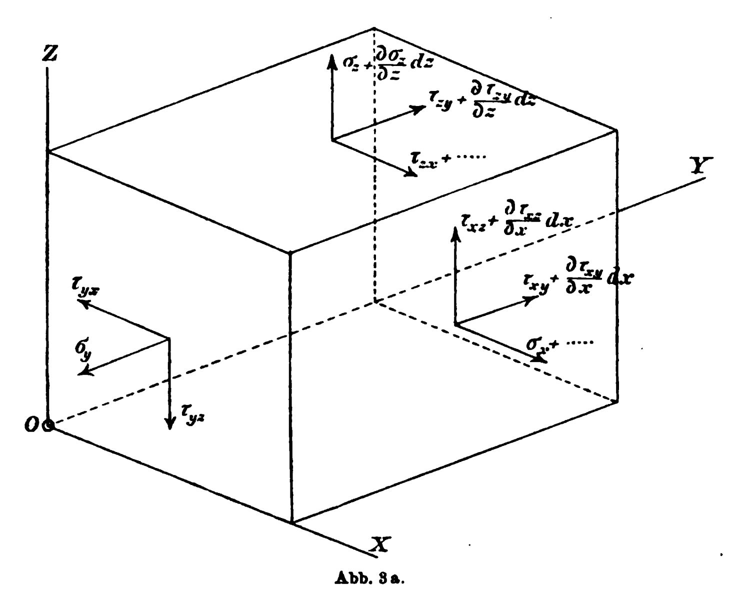


Abb. 3a.

in der Tat die für beide Teile zutreffende, eindeutige Aussage machen, daß eine Normalspannung immer als Zugspannung, also positiv zu rechnen ist, wenn sie in die Richtung der äußeren Normale fällt.

Nun fasse man in Abb. 3 etwa die beiden sich gegenüberliegenden Seitenflächen ins Auge, die senkrecht zur X-Achse stehen. Die äußere Normale der einen geht in der Richtung der positiven X-Achse, die der anderen in der entgegengesetzten Richtung. Denkt man sich beide Flächen immer näher aneinander gerückt, so wird zuletzt die in der einen Fläche übertragene Spannung nur einfach die nach dem

Gesetze der Aktion und Reaktion auftretende Gegenwirkung der zur anderen gehörigen Spannung sein. In erster Annäherung können wir daher bei je zwei sich gegenüberliegenden Flächen des Parallelepipeds die Spannungen als gleich groß und entgegengesetzt gerichtet betrachten. Nur wenn man absichtlich auf die kleinen Unterschiede achten will, die dadurch zu Stande kommen, daß die eine Fläche etwas entfernt von der zu ihr parallelen ist, wird man die in Abb. 3 eingeschriebenen genaueren Ausdrücke zu benutzen haben.

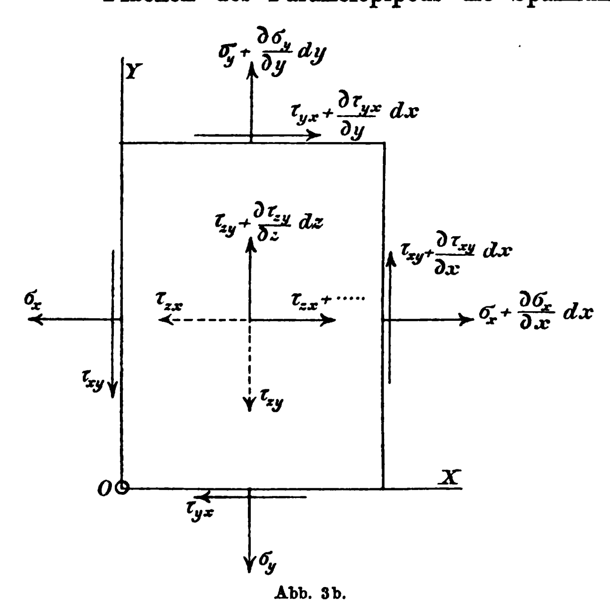


Abb. 3b.

In Bezug auf die Richtungen, die als positiv anzusehen sind, ist noch folgendes zu beachten. Bei jenen Seitenflächen, deren äußere Normalen in den Richtungen der positiven Koordinatenachsen gehen, zählt die Normalspannung σ ebenfalls in dieser Richtung positiv, denn wir haben schon vorher festgesetzt, daß Zugspannungen immer positiv gerechnet werden sollen. Wir kommen daher zur einfachsten Übereinkunft über die Wahl der Vorzeichen, wenn wir bestimmen, daß nicht nur σ, sondern auch die beiden Komponenten der Schubspannung τ auf jenen Flächen in den Richtungen der positiven Koordinatenachsen positiv gezählt werden sollen, deren äußere Normalen in die positiven Achsenrichtungen fallen. Bei den gegenüberliegenden Flächen sind dann natürlich alle Pfeile umzukehren, wenn die Spannungskomponenten positive Werte haben. Nach diesen Grundsätzen sind die

Pfeile in Abb. 3, mit der man sich recht vertraut machen möge, eingetragen. In der axonometrischen Zeichnung sind die Spannungen auf den drei verdeckt liegenden Seitenflächen weggelassen. Von den drei sichtbaren Seitenflächen hat die in der XZ-Ebene liegende eine äußere Normale, die der positiven Y-Achse entgegengesetzt gerichtet ist. Daher sind hier auch die Pfeile von σ und den beiden Komponenten von τ den Koordinatenachsen entgegengesetzt gerichtet gezeichnet. Bei den beiden anderen sichtbaren Seitenflächen gehen dagegen die Pfeile in den positiven Achsenrichtungen, weil dies auch von den äußeren Normalen zutrifft.

Die den Spannungskomponenten σ und τ angehängten Ordnungszeiger reden eine leicht verständliche Sprache. Jedes σ trägt nur einen Zeiger, denn hier genügt es, die Stellung des Flächenelementes anzugeben, zu dem σ gehört, und dies geschieht, indem die Achsenrichtung angemerkt wird, zu der das Flächenelement senkrecht steht und zu der σ daher parallel geht. Auch der erste der beiden Zeiger der Schubspannungskomponenten τ bezieht sich auf die Stellung des zugehörigen Flächenelementes und stimmt daher auf jeder Fläche mit dem Zeiger von σ überein. Der zweite Zeiger gibt dagegen an, welcher Achsenrichtung die betreffende Komponente parallel geht.

Zur Erläuterung von Abb. 3 muß ich endlich noch auf einen Umstand aufmerksam machen, an den der Leser freilich schon längst gedacht haben wird. Von den drei sichtbaren Seitenflächen geht nur eine durch den Punkt O, in dem der Spannungszustand untersucht werden soll. Hier konnte man sich damit begnügen, die Spannungskomponenten einfach mit σ_y, τ_{yx} und τ_{yz} zu bezeichnen. Freilich sieht man dabei schon von unendlich kleinen Unterschieden ab, die sich daraus ergeben, daß der Spannungszustand nicht über die ganze Rechteckfläche genau mit dem in O übereinstimmt. Auf der gegenüberliegenden Seitenfläche kommen aber dieselben Unterschiede ebenfalls vor und gerade weil von beiden Flächen in dieser Hinsicht dasselbe gilt, ist es nicht nötig, auf diese unendlich

kleinen Unterschiede weiter zu achten. Dagegen kann es nötig werden, den Unterschied hervorzuheben, der dadurch entsteht, daß die gegenüberliegende Seitenfläche um das Stück dy in der Richtung der Y-Achse gegen die vordere verschoben ist. Wir müssen, um diese feinen Abstufungen zu berücksichtigen, der Normalspannung σ_y auf der gegenüberliegenden Seitenfläche noch ein Differential zufügen, so daß wir dort

$$\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy$$

erhalten und ähnliches gilt für die anderen Komponenten. Aus dem Grundrisse in Abb. 3b ist dies ersichtlich. Ebenso sind in der axonometrischen Figur die Spannungskomponenten auf den beiden sichtbaren Seitenflächen, die nicht durch den Punkt O gehen, schon mit den Zuwüchsen versehen, die den Abständen von den gegenüberliegenden Flächen entsprechen. Wo der Platz nicht ausreichte, sind diese Differentiale auch nur durch Punkte angedeutet, wie in $\tau_{zx} + \cdots$ an Stelle von

$$\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \cdot dz.$$

Nachdem man sich mit allen diesen Einzelheiten, die in Abb. 3 zu berücksichtigen waren, hinreichend vertraut gemacht hat, ist schon der erste und wichtigste Schritt zum Verständnisse der Grundgleichungen der Festigkeitslehre geschehen; diese ergeben sich nämlich aus den Bedingungen für das Gleichgewicht der Kräfte am Parallelepiped. Zunächst wollen wir das Gleichgewicht gegen Drehung ins Auge fassen, da wir schon in § 3 erkannten, daß wir hierdurch zu den Bedingungen geführt werden, die zwischen den neun Spannungskomponenten $\sigma_x\ \sigma_y\ \sigma_z\ \tau_{xy}\ \tau_{xz}\ \tau_{yz}\ \tau_{yx}\ \tau_{zx}\ \tau_{zy}$ für die drei durch den Punkt O gelegten Flächenelemente bestehen müssen, damit sie miteinander verträglich sind. Um z. B. zu erkennen, welche Bedingung erfüllt sein muß, damit keine Drehung um eine zur Z-Achse parallele Grade eintreten kann, projizieren wir den Körper mit allen daran angreifenden Kräften auf die XY-Ebene, wie dies in Abb. 3b bereits geschehen ist. Wir sehen dann,

daß zwei Kräftepaare vorkommen, die eine solche Drehung in entgegengesetzter Richtung anstreben. Ein Kräftepaar wird durch die Spannungen τ_{yx} auf den beiden Rechteckseiten gebildet, deren Normalen zur Y-Achse parallel gehen. Die Größe jeder Kraft dieses Paares wird gefunden, wenn wir die bezogene Spannung τ_{yx} mit dem Inhalte des Flächenelementes, über das sie verteilt ist, multiplizieren; sie ist also gleich $\tau_{yx} \cdot dx\,dz$ zu setzen. Das statische Moment des Kräftepaars ist daher gleich

$$\tau_{yx} \cdot dx\,dy\,dz.$$

Ebenso finden wir für das Moment des Kräftepaares der Schubspannungen τ_{xy}, die über die beiden zur X-Achse senkrechten Seitenflächen verteilt sind,

$$\tau_{xy} \cdot dx\,dy\,dz.$$

Die Gleichgewichtsbedingung gegen Drehen erfordert daher, daß

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

ist.*) Natürlich läßt sich dieselbe Betrachtung auch für eine Drehung um jede der beiden anderen Koordinatenachsen wiederholen, und wir erhalten daher im ganzen die drei Gleichgewichtsbedingungen

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tag{4}$$

die einen der wichtigsten Sätze der Festigkeitslehre aussprechen, den man als den Satz von der Gleichheit der einander zugeordneten Schubspannungen zu bezeichnen pflegt.

Man kann ihn auch noch in etwas allgemeinerer Form aufstellen, wenn man an Stelle des rechtwinkligen Parallelepipeds in Abb. 3 ein schiefwinkliges untersucht; ich sehe aber davon ab, dies weiter auszuführen, da nicht viel dabei herauskommt. Ferner

*) Im Innern eines Magneten ist dieser Schluß nicht zulässig, da hier außer den Schubspannungen noch ein auf Verdrehen des ganzen Volumenelementes hinwirkendes Moment der magnetischen Kräfte auftritt, das von derselben Größenordnung sein kann. Von solchen ausnahmsweise vorkommenden Fällen soll aber hier stets abgesehen werden

erwähne ich noch, daß viele Schriftsteller für die einander gleichen Schubspannungskomponenten τ_{xy} und τ_{yx} eine einheitliche Bezeichnung, nämlich τ_z einführen, wobei jetzt der Zeiger z darauf hinweisen soll, daß jene Schubspannungen gemeint sind, die sich im Gleichgewichte gegen eine Drehung um die Z-Achse halten, und ähnlich für die übrigen. Man spart hierbei zwar das Anschreiben eines zweiten Zeigers; es will mir aber scheinen, daß dieser Vorteil nicht erheblich genug ist, um die auschaulichere Schreibweise mit zwei Zeigern aufzugeben. Ich werde daher diese beibehalten.

Wir haben jetzt erkannt, daß zur vollständigen Beschreibung des Spannungszustandes des Körpers in einem gegebenen Punkte O die Angabe von sechs Zahlen erforderlich ist. Diese Anzahl kann auch durch weitere Betrachtungen nicht herabgedrückt werden. Man pflegt diese Tatsache auch wohl mit den Worten auszusprechen, daß ∞^6 verschiedene Spannungszustände möglich sind, oder daß die Reihe aller Spannungszustände eine Mannigfaltigkeit von sechs Dimensionen bildet.

Wir wollen jetzt noch das Gleichgewicht des Parallelepipeds gegen Verschieben in den drei Achsenrichtungen betrachten. Dieses wird schon durch das Gesetz der Aktion und Reaktion verbürgt, wenn wir auf die sehr kleinen Unterschiede der Spannungen an gegenüberliegenden Seitenflächen keine Rücksicht nehmen, wie es bei der vorigen Betrachtung geschehen konnte. Wir wollen aber dabei nicht stehen bleiben, weil wir bei dieser Gelegenheit noch erfahren können, in welchen Beziehungen die Zuwüchse der Spannungskomponenten bei verschiedenen Fortschreitungsrichtungen zueinander stehen müssen. Natürlich ist es jetzt, wo wir nur auf die kleinen Unterschiede der Spannungen auf gegenüberliegenden Flächen zu achten haben, nicht mehr zulässig, die dem Volumen des Parallelepipeds proportionale Fernkraft, also etwa das Gewicht des Körperchens, zu vernachlässigen. Dieses ist zwar unendlich klein gegen die Spannungen selbst, aber durchaus vergleichbar mit den kleinen Unterschieden zwischen den Spannungen auf gegenüberliegenden Seiten. Ich denke mir die auf die Raumeinheit bezogene Massenkraft in drei Komponenten nach den Koordinatenachsen zerlegt, die ich mit X, Y, Z bezeichne und

positiv rechne, wenn sie mit den positiven Achsen gleichgerichtet sind.

In der Richtung der X-Achse kommen jetzt an dem Körperchen sieben Kräfte vor, deren Summe gleich Null sein muß, damit das Gleichgewicht gesichert sei. An jeder Seitenfläche des Parallelepipeds haben wir eine zur X-Achse parallele Spannungskomponente, und dazu kommt die Komponente der Massenkraft im Betrage $X\,dx\,dy\,dz$. Die Spannungskomponenten kann man paarweise zusammenfassen. Auf dem durch den Punkt O gehenden, zur X-Achse senkrechten Rechtecke haben wir die Komponente σ_x der bezogenen Spannung, also im ganzen den Betrag $\sigma_x \cdot dy\,dz$ einer Kraft, die der positiven X-Achse entgegengesetzt gerichtet ist. Auf der gegenüberliegenden Seitenfläche kommt dazu die um ein Differential verschiedene und nach der positiven X-Achse hin gerichtete Normalspannung. Fassen wir beide zusammen, so behalten wir einen Überschuß von der Größe

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \cdot dx\,dy\,dz$$

in der Richtung der positiven X-Achse. Ebenso tragen die beiden zur Y-Achse senkrechten Seitenflächen zusammen genommen das Glied

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \cdot dx\,dy\,dz$$

zur Komponentensumme in der Richtung der X-Achse bei und ähnlich die beiden letzten Seitenflächen. Schreiben wir nun die Bedingung an, daß die algebraische Summe aller parallel zur X-Achse gehenden Komponenten verschwinden muß, so erhalten wir nach Wegheben des gemeinsamen Faktors $dx\,dy\,dz$ die erste der drei folgenden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0\\
\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0\\
\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + Z = 0
\end{aligned}\right\} . \qquad (5)$$

Die beiden letzten sind ebenso gebildet, wie die erste, die wir eben ableiteten, und sprechen die Gleichgewichtsbedingungen gegen Verschieben in den Richtungen der Y- und der Z-Achse aus. Es ist zwar nützlich, sie zur Übung ebenfalls aus Abb. 3 abzulesen, aber nicht notwendig, da keine Koordinatenachse vor den anderen etwas voraus hat und was für die eine bewiesen ist, daher auch für die anderen gelten muß. Es genügt daher vollständig, sich davon zu überzeugen, daß die beiden anderen Gleichungen aus der ersten hervorgehen, wenn man die Koordinaten x, y, z zyklisch miteinander vertauscht.

§ 5. Das Gleichgewicht am Tetraeder.

Wir wollen jetzt die am Schlusse von § 3 in allgemeinen Umrissen angestellte Betrachtung auch noch in einen Satz von Gleichungen umprägen. Dazu beziehe ich mich auf Abb. 4, in der das Tetraeder in Aufriß und Grundriß gezeichnet ist. Als gegeben werden die Spannungskomponenten betrachtet, die zu den Stellungen der drei Koordinatenebenen gehören; verlangt wird die Berechnung der Spannungskomponenten auf der in beliebiger Stellung gezogenen vierten Tetraederfläche, deren äußere Normale mit n bezeichnet ist. Es ist am bequemsten, die Spannung für diese Fläche, die mit p_n bezeichnet werden möge, zunächst in drei Komponenten zu zerlegen, die den Koordinatenachsen parallel laufen. In der Abbildung sind diese Komponenten mit p_{nx}, p_{ny}, p_{nz} bezeichnet; die Zeiger haben also dieselbe Bedeutung wie bei den früheren Betrachtungen.

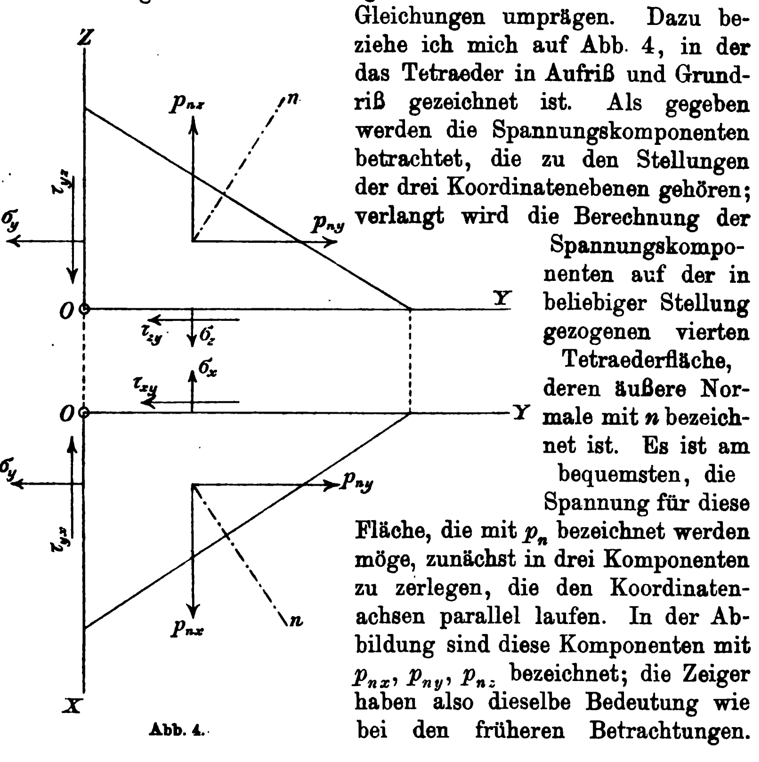


Abb. 4.

Nachdem diese Komponenten gefunden sind, kann man leicht auch die Normalspannung σ_n und die in gegebenen Richtungen verlaufenden Schubspannungskomponenten daraus ableiten, wenn sich dies als nötig herausstellt.

Die Fläche der vierten Tetraederseite sei gleich dF; die Flächen der drei anderen bilden die Projektionen von dF auf die Koordinatenebenen und werden daher aus dF durch Multiplikation mit den Kosinus der Neigungswinkel gefunden. Der Winkel zwischen dF und der YZ-Ebene ist aber nach einem bekannten Satze der Stereometrie auch gleich dem Winkel zwischen den Normalen auf beiden Ebenen, der kurz als Winkel (nx) bezeichnet werden soll.

An der in die YZ-Ebene fallenden Seitenfläche des Tetraeders kommt eine in der Richtung der negativen X-Achse verlaufende Spannungskomponente σ_x vor, die nach Multiplikation mit dem Flächeninhalte dieser Tetraederseite den Beitrag

$$\sigma_x dF \cos(nx)$$

zur Komponentengleichung liefert. Von der Seitenfläche in der XZ-Ebene stammt ebenso, wie man aus Abb. 4 unmittelbar ablesen kann, der Beitrag

$$\tau_{yx} dF \cos(ny)$$

und von der Seitenfläche in der XY-Ebene der Beitrag

$$\tau_{zx} dF \cos(nz),$$

wobei zu beachten ist, daß alle diese drei Komponenten, sofern die Spannungskomponenten σ und τ alle das positive Vorzeichen haben, nach der über die Richtungsbezeichnungen getroffenen Übereinkunft in der Richtung der negativen X-Achse gehen. Die Spannungskomponente p_{nx} auf der vierten Tetraederseite wollen wir, da hierüber bisher noch nichts festgesetzt ist, als positiv betrachten, wenn sie in die Richtung der positiven X-Achse fällt. Die Gleichgewichtsbedingung gegen Verschieben in der Richtung der X-Achse erfordert nun, daß die Komponente $p_{nx} dF$ der Summe der vorher aufgeführten Kräfte, die in entgegengesetzter Richtung gehen, gleich ist. Nach Wegheben des gemeinsamen Faktors dF erhalten wir daher die erste der drei folgenden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} p_{nx} &= \sigma_x \cos(nx) + \tau_{yx} \cos(ny) + \tau_{zx} \cos(nz) \\ p_{ny} &= \sigma_y \cos(ny) + \tau_{zy} \cos(nz) + \tau_{xy} \cos(nx) \\ p_{nz} &= \sigma_z \cos(nz) + \tau_{xz} \cos(nx) + \tau_{yz} \cos(ny) \end{aligned}\right\}. \qquad (6)$$

Die beiden folgenden ergeben sich aus der ersten durch zyklische Vertauschung von x, y, z und sprechen die Gleichgewichts-

bedingungen gegen Verschieben in den Richtungen der Y- und Z-Achse aus.

Damit ist die Aufgabe gelöst. Man wendet die Gleichungen (6) namentlich dann an, wenn die vierte Tetraederseite in die Oberfläche des ganzen Körpers fällt. Unter den p sind dann die Druckkräfte zu verstehen, die von außen her auf den ganzen Körper übertragen werden. Diese sind gewöhnlich gegeben; sehr häufig sind sie gleich Null und die vorigen Gleichungen geben dann in der Form

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x \cos(nx) + \tau_{yx} \cos(ny) + \tau_{zx} \cos(nz) = 0\\ \sigma_y \cos(ny) + \tau_{zy} \cos(nz) + \tau_{xy} \cos(nx) = 0\\ \sigma_z \cos(nz) + \tau_{xz} \cos(nx) + \tau_{yz} \cos(ny) = 0\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

die Beziehungen an, die zwischen den Spannungskomponenten in der Nähe einer freien Oberfläche des ganzen Körpers bestehen müssen.

Der denkende Anfänger wird leicht auf die Frage verfallen, weshalb ich dabei stehen bleibe, die Gleichgewichtsbedingungen für Körperelememente von der Gestalt eines Parallelepipeds oder eines Tetraeders zu untersuchen. Für ihn bemerke ich hier noch, daß in der Tat nichts im Wege steht, das Gleichgewicht eines beliebig gestalteten Körperelements in derselben Weise zu behandeln. Man kommt aber dabei zu keinen neuen Resultaten.

§ 6. Der ebene Spannungszustand.

Bisher haben wir den allgemeinsten Spannungszustand untersucht, der überhaupt in einem Körper auftreten kann. Die Fälle, mit denen man praktisch zu tun bekommt, sind aber gewöhnlich viel einfacher. Aus diesem Grunde wollen wir die weitere Untersuchung an dieser Stelle auf den Fall des sogenannten ebenen Problems beschränken. Man versteht darunter einen Spannungszustand, bei dem nach einer bestimmten Richtung hin überhaupt keine Spannungskomponenten auftreten. Um diesen Fall weiter zu untersuchen, wollen wir uns das Koordinatensystem so gewählt denken, daß die Z-Achse in die soeben bezeichnete Richtung fällt. Der Fall des ebenen Problems wird dann durch die Aussagen

$$\sigma_z = 0, \quad \tau_{xz} = 0, \quad \tau_{yz} = 0 \qquad (8)$$

gekennzeichnet. Von den sechs Spannungskomponenten, die im allgemeinen zur Beschreibung des Spannungszustandes erforderlich sind, unterscheiden sich demnach hier nur noch drei von Null, nämlich σ_x, σ_y und $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, wofür wir jetzt, da keine Verwechslung mehr möglich ist, kurz τ schreiben können.

Wir wollen jetzt die Frage aufwerfen, wie man beim ebenen Problem die Schnittrichtung wählen muß, damit die Spannungen ihre größten Werte annehmen. Dabei genügt es, nur solche Schnittrichtungen in Betracht zu ziehen, die parallel zur Z-Achse gehen. Wir denken uns ein dreiseitiges Prisma abgegrenzt, dessen Grundfläche in Abb. 5 angegeben ist, während die zur Z-Achse parallelen Kanten die Längen dz haben mögen. Auf die beiden Grundflächen wirken nach den Gleichungen (8) überhaupt keine Kräfte. Die Spannungskomponenten an den drei Seitenflächen sind in die Abbildung nach jenen Richtungen eingetragen, die als positiv gerechnet werden. Die Spannung auf der unter dem Winkel φ gegen die X-Achse geneigten Seitenfläche ist in die Normalkomponente σ' und die Schubspannung τ' zerlegt. Die letzte kann ebenfalls keine Komponente in der Richtung der Z-Achse haben, weil an den übrigen Seitenflächen keine Kraft in dieser Richtung, die mit ihr Gleichgewicht halten könnte, vorkommt; sie ist also ebenso wie σ' und alle übrigen Spannungen parallel zur XY-Ebene.

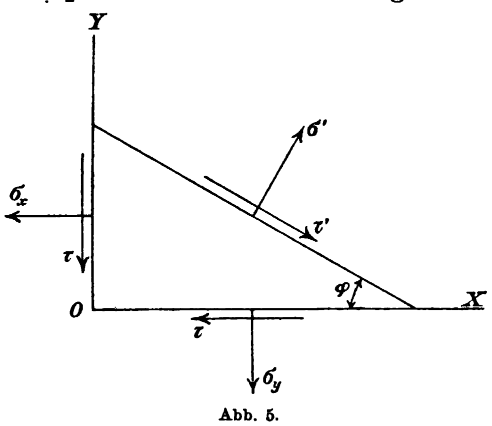


Abb. 5.

Das Gleichgewicht der Kräfte gegen Verschieben nach der X-Achse liefert, wenn wir den Inhalt der schief zu den Achsen stehenden Seitenfläche mit dF bezeichnen, die Bedingungs-

gleichung

$$\sigma' dF \sin\varphi + \tau' dF \cos\varphi - \sigma_x dF \sin\varphi - \tau\, dF \cos\varphi = 0,$$

aus der man den gemeinsamen Faktor dF wegheben kann. Ebenso liefert die Komponentengleichung für die Richtung der Y-Achse

$$\sigma' \cos\varphi - \tau' \sin\varphi - \sigma_y \cos\varphi - \tau \sin\varphi = 0.$$

Beide Gleichungen lösen wir nach den Unbekannten σ' und τ' auf. Durch Multiplikation der ersten Gleichung mit $\sin\varphi$, der zweiten mit $\cos\varphi$ und Addition erhält man zunächst

$$\sigma' = \sigma_x \sin^2\varphi + \sigma_y \cos^2\varphi + 2\tau \sin\varphi \cos\varphi.$$

Bequemer ist es für das Folgende, diesen Ausdruck dadurch noch etwas umzugestalten, daß man den doppelten Winkel einführt, also z. B.

$$\sin^2\varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}$$

setzt. Dadurch geht der vorige Wert über in

$$\left.\begin{aligned} \sigma' &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \cos 2\varphi + \tau \sin 2\varphi \\ \tau' &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi + \tau \cos 2\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

In der zweiten Gleichung ist der Wert von τ' angegeben, der auf dieselbe Weise erhalten wird. Die Spannungskomponenten σ' und τ' sind damit als Funktionen des Winkels φ gefunden, den wir uns veränderlich denken können, wodurch wir zu allen Schnittrichtungen gelangen, die zur XY-Ebene senkrecht stehen. Um die Maximalwerte zu finden, differentiieren wir zunächst σ' nach φ und setzen den Differentialquotienten gleich Null. Aus der so entstandenen Gleichung

$$0 = -\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \cdot 2 \sin 2\varphi + 2\tau \cos 2\varphi \tag{10}$$

erhalten wir zunächst $\operatorname{tg} 2\varphi$ und daraus auch φ selbst, nämlich

$$\varphi = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{2\tau}{\sigma_y - \sigma_x} + n\frac{\pi}{2}, \tag{11}$$

wenn n eine beliebige positive oder negative ganze Zahl be-

deutet. Durch die Zufügung eines Vielfachen von π wird nämlich der Wert von $\operatorname{tg} 2\varphi$ nicht geändert; man kann also $n\pi$ beliebig zu 2φ und daher $n\frac{\pi}{2}$ beliebig zu φ addieren, ohne die Bedingung für ein Maximum oder Minimum von σ' zu ändern.

Die rechte Seite von Gl. (10) stimmt genau mit dem doppelten Werte von τ' in Gl. (9) überein. Wir erkennen daraus, daß σ' in jenen Schnittflächen seinen größten oder kleinsten Wert annimmt, für die τ' verschwindet. Zugleich folgt aus Gl. (11), daß dies immer mindestens in zwei Schnittflächen zutrifft, die aufeinander senkrecht stehen (für die sich φ um einen rechten Winkel unterscheidet). Daneben ist nur noch ein Ausnahmefall möglich, der dann eintritt, wenn $\tau = 0$ und $\sigma_x = \sigma_y$ war. Dann ist auch für alle anderen Schnittrichtungen $\tau' = 0$ und σ' ist unabhängig von φ, d. h. für alle Schnittrichtungen gleich groß.

Von diesem Ausnahmefalle abgesehen, kommen aber beim ebenen Probleme immer nur zwei, aufeinander senkrechte und zur Z-Achse parallele Schnittrichtungen vor, für die τ verschwindet, auf denen also die gesamte Spannung senkrecht steht und für die zugleich σ' seinen kleinsten und seinen größten Wert annimmt. Man nennt jene Richtungen die **Hauptrichtungen** und die zugehörigen Spannungen die **Hauptspannungen** des Körpers an der betreffenden Stelle.

Die Größe der Hauptspannungen findet man aus Gl. (9) durch Eintragen des durch Gl. (10) oder (11) bestimmten Wertes von φ. Am einfachsten ist es, zuerst Gl. (10) nach $\sin 2\varphi$ und $\cos 2\varphi$ aufzulösen. Man erhält dann

$$\sin 2\varphi = \pm \frac{2\tau}{\sqrt{4\tau^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2}}; \quad \cos 2\varphi = \pm \frac{\sigma_y - \sigma_x}{\sqrt{4\tau^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2}}.$$

Aus Gl. (9) findet man dann weiter

$$\sigma'_{\substack{\max\\ \min}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 2\tau^2}{\sqrt{4\tau^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2}}$$

und, wenn man beachtet, daß im letzten Bruche der Zähler

die Hälfte vom Quadrate des Nenners bildet, kürzer

$$\sigma'_{\substack{\max\\ \min}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{4\tau^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2}. \qquad (12)$$

Daß der eine Wert ein Maximum, der andere ein Minimum liefert, kann auf gewöhnlichem Wege durch Bilden des zweiten Differentialquotienten von σ' nach φ nachgewiesen werden; es folgt aber auch schon daraus, daß jede stetige Funktion des Winkels φ, die nicht konstant ist, bei einmaligem Umlaufe des ganzen Kreises mindestens ein Maximum und ein Minimum haben muß.

Wenn $\tau = 0$ ist, fallen die Richtungen der Koordinatenachsen mit den Hauptrichtungen zusammen und σ_x, σ_y sind selbst die Hauptspannungen. Einander gleich können die Hauptspannungen nur dann werden, wenn zugleich $\tau = 0$ und $\sigma_x = \sigma_y$ ist. Dann kann jede Richtung in der XY-Ebene als Hauptrichtung angesehen werden.

Wir wenden uns jetzt zur Ermittelung der Maximalwerte der Schubspannungskomponente τ'. Aus Gl. (9) erhalten wir

$$\frac{d\tau'}{d\varphi} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot 2\cos 2\varphi - 2\tau \sin 2\varphi .$$

Die Bedingung für ein Maximum oder Minimum wird daher ausgesprochen durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau}. \qquad (13)$$

Dieser Wert ist das Negative der Kotangente von 2φ, die aus der Bedingungsgleichung (10) gefunden wird. Daraus folgt, daß der nach Gl. (13) bestimmte Winkel sich von dem aus Gl. (10) abgeleiteten um einen Rechten oder um $\frac{\pi}{2}$ unterscheidet. Die Winkel φ selbst, für die einerseits σ' und andererseits τ' die Maximal- oder Minimalwerte annehmen, unterscheiden sich demnach um $\frac{\pi}{4}$. Die größten Schubspannungen erhält man also für solche Schnittrichtungen, die mit den Hauptrichtungen Winkel von 45^0 einschließen. Beachtenswert ist, daß die Normalspannungen

auf diesen Ebenen im allgemeinen nicht verschwinden, wie man auf Grund des Vorausgegangenen hätte vermuten können. Setzt man 2φ aus Gl. (13) in die erste der Gl. (9), so findet man für die zugehörige Normalspannung $\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$, und dieser Wert gilt für jede der beiden zueinander senkrechten Schnittebenen, auf denen τ' zum Maximum oder Minimum wird. Nur wenn $\sigma_x = -\sigma_y$ ist, wird diese Normalspannung zu Null.

Aus Gl. (13) folgt

$$\sin 2\varphi = \pm \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sqrt{4\tau^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2}}; \quad \cos 2\varphi = \pm \frac{2\tau}{\sqrt{4\tau^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2}},$$

und wenn man diese Werte in die zweite der Gleichungen (9) einsetzt, erhält man

$$\tau'_{\substack{max \\ min}} = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{4\tau^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2}. \qquad (14)$$

Die beiden Werte τ'_{max} und τ'_{min} untescheiden sich also nur durch das Vorzeichen voneinander. Dieses Ergebnis ist, soweit es sich um die absoluten Größen handelt, selbstverständlich nach dem in den Gleichungen (4) ausgesprochenen Satze über die Gleichheit der in senkrechten Schnittflächen einander zugeordneten Schubspannungen. Die Vorzeichen dagegen sind in Gleichung (14) gleichgültig, da sie nur durch die willkürliche Festsetzung darüber bedingt sind, in welcher Richtung τ' als positiv gerechnet werden sollte.

§ 7. Der lineare oder einachsige Spannungszustand.

Setzt man beim ebenen Spannungszustande eine der Hauptspannungen gleich Null, so gelangt man auf den einachsigen oder linearen Spannungszustand, der z. B. bei der in § 3 besprochenen Zugstange unter den dort angegebenen Voraussetzungen auftritt. Man nehme etwa an, daß die Koordinatenachsen schon von vornherein in die Hauptrichtungen gelegt gewesen seien, setze also $\tau = 0$ und, um auf den linearen Spannungszustand zu kommen, außerdem noch $\sigma_y = 0$. Die

Gleichungen (9) gehen dann über in

$$\left.\begin{aligned} \sigma' &= \sigma_x \cdot \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} = \sigma_x \sin^2 \varphi \\ \tau' &= \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\varphi. \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Wir merken uns für diesen Fall, daß nach der zweiten der Gleichungen (15) bei ihm die größte Schubspannung halb so groß ist als die Zug- oder Druckspannung in der Hauptrichtung.

Den ebenen Spannungszustand kann man sich durch das Zusammenwirken von zwei einachsigen Spannungszuständen hervorgebracht denken, deren Hauptrichtungen rechtwinklig zueinander stehen. Ebenso kann auch, wie in Band V näher besprochen werden wird, der allgemeinste Spannungszustand auf drei rechtwinklig zueinander stehende einfache Zug- oder Druckbeanspruchungen, also auf drei nebeneinander auftretende einachsige Spannungszustände zurückgeführt werden.

§ 8. Spannungskreis und Spannungsellipse.

Zur Veranschaulichung der durch die Formeln in § 6 ausgesprochenen Eigenschaften des ebenen Spannungszustandes bedient man sich mit Vorteil der von Mohr angegebenen graphischen Darstellung durch den Spannungskreis. Denkt man sich die Koordinatenachsen in die beiden Hauptrichtungen gelegt, setzt also $\tau = 0$, so daß σ_x und σ_y die Hauptspannungen bedeuten, so gehen die Gleichungen (9) über in

$$\left.\begin{aligned} \sigma' &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \cos 2\varphi \\ \tau' &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi. \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Man trage auf einer Abzissenachse in Abb. 6 vom Ursprunge O aus die beiden Hauptspannungen $\sigma_x = OB$ und $\sigma_y = OA$ ab und schlage über AB als Durchmesser einen Kreis. Zieht man dann vom Mittelpunkte M aus den Halbmesser MC, der den Winkel 2φ mit der Abzissenachse ein-

schließt, so gibt, wie ein Vergleich der Figur mit den Gleichungen (16) sofort erkennen läßt, die Abszisse des Punktes C die Normalspannung σ' und die Ordinate die Schubspannung τ' für eine Schnittrichtung an, die den Winkel φ mit der Richtung der Hauptspannung σ_x bildet. Der Mittelpunkt M des Spannungskreises hat nämlich die Abszisse $\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$ und der Radius ist gleich $\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$. Hieraus folgt auch, daß die in diesem Schnitt übertragene, aus σ' und τ' resultierende Gesamtspannung ϱ der Größe nach durch die Verbindungslinie OC dargestellt wird und daß sie mit der Normalen zur Schnittfläche einen Winkel einschließt, der dem Winkel COM in der Abbildung gleich ist.

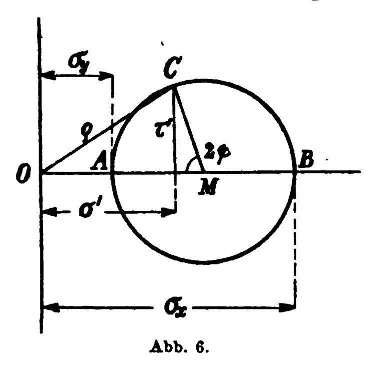


Abb. 6.

In der Abbildung war angenommen, daß beide Hauptspannungen Zugspannungen seien und unter σ_x die größere von beiden verstanden. Sollte σ_y eine Druckspannung sein, so ist OA von O aus nach links hin abzutragen; ebenso sind beide nach links abzutragen, wenn auch noch σ_x eine Druckspannung (und zwar in diesem Falle die dem Absolutbetrage nach kleinere von beiden) ist. Im übrigen ändert sich dadurch an der gewählten Darstellung nichts.

Eine andere Art der Darstellung wird durch die Spannungsellipse gewonnen. Man denke sich für eine Reihe von Schnitten die Resultierende ϱ aus σ' und τ' ermittelt und sie von einem Punkte O aus in jener Richtung, die sie tatsächlich einnimmt, abgetragen. Die Endpunkte aller dieser Strahlen liegen auf einer Ellipse, deren Mittelpunkt O ist und die man als die Spannungsellipse bezeichnet. Um den Beweis für diese Behauptung zu führen, zerlege man ϱ in zwei Komponenten p_{nx} und p_{ny} nach den Koordinatenachsen, die wieder mit den Hauptrichtungen des Spannungszustandes zusammenfallen sollen. Anstatt p_{nx} und p_{ny} aus den früher aufgestellten Formeln abzuleiten, entnimmt man sie besser unmittelbar der Gleichgewichtsbetrachtung für das in Abb. 7 dar-

gestellte Prisma: Dieses entspricht im übrigen genau dem Prisma in Abb. 5, nur mit dem Unterschiede, daß die Schubspannung τ weggefallen ist, weil jetzt σ_x und σ_y die Hauptspannungen sein sollen. Das Gleichgewicht gegen Verschieben in den Richtungen der Koordinatenachsen liefert die Gleichungen

$$p_{nx} = \sigma_x \sin \varphi; \quad p_{ny} = \sigma_y \cos \varphi$$

und durch Elimination von φ erhält man daraus

$$\left(\frac{p_{nx}}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{p_{ny}}{\sigma_y}\right)^2 = 1.$$

Das ist, da p_{nx} und p_{ny} die Koordinaten des Endpunktes des Strahles ϱ sind, die Gleichung der Kurve, auf der die Endpunkte

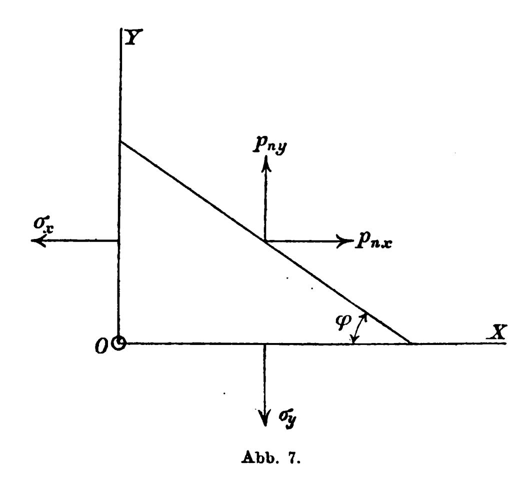


Abb. 7.

aller Strahlen ϱ enthalten sind und aus der Gleichung folgt, daß die Kurve eine Ellipse ist, deren Mittelpunkt auf dem Koordinatenursprunge liegt und deren Hauptachsen mit den Koordinatenachsen, d. h. mit den Hauptrichtungen des Spannungszustandes zusammenfallen.

Die Spannungsellipse gibt zwar alle Spannungen, die für verschiedene Schnittrichtungen vorkommen können, nach Größe und Richtung an, läßt aber nicht ohne weiters erkennen, zu welcher besonderen Schnittrichtung die durch irgend einen ihrer Strahlen dargestellte Spannung ϱ gehört. In dieser Hinsicht gibt der Mohrsche Spannungskreis einen besseren Aufschluß.

§ 9. Die reine Schubbeanspruchung.

Ein besonderer Spannungszustand, mit dem man häufig zu tun hat, wird dadurch gekennzeichnet, daß man einen kleinen Würfel abgrenzen kann, an dem auf vier Seitenflächen ausschließlich Schubspannungen senkrecht zur Z-Richtung vorkommen, während die beiden zur Z-Achse senkrechten Seitenflächen ohne Spannung sind (Abb. 8). Dieser, als der Fall der reinen Schubbeanspruchung bezeichnete Spannungszustand ist zunächst ein ebener und daher in den allgemeinen Formeln von § 6 mit enthalten. Man kommt auf ihn, wenn man die beiden Hauptspannungen gleich groß und von entgegengesetztem Vorzeichen wählt. Die Hauptrichtungen des Spannungszustandes fallen dann mit den Diagonalebenen des Würfels, die durch die Z-Richtung gelegt werden können, zusammen und die Schubspannung auf der Würfelseite ist ebenso groß als jede der beiden Hauptspannungen.

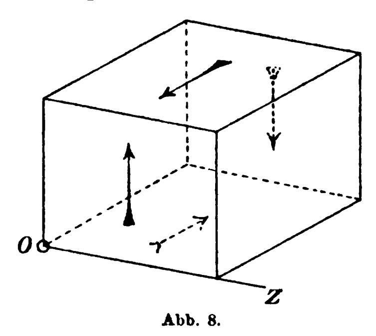


Abb. 8.

Diese Behauptungen folgen auch, ohne daß man auf die Formeln von § 6 zurückzugreifen braucht, sehr einfach aus dem Mohrschen Spannungskreise, dessen Mittelpunkt in diesem Falle mit dem Ursprunge O in Abb. 6 zusammenfällt. — Auch die Spannungsellipse geht im Falle der reinen Schubbeanspruchung in einen Kreis über.

Aufgaben.

1. *Aufgabe. Leite die den Gleichungen* (5) *entsprechenden Gleichgewichtsbedingungen für das ebene Problem ab!*

Lösung. Streicht man die nach den Gleichungen (8) beim ebenen Probleme wegfallenden Spannungen aus den Gleichungen (5), so gibt die letzte $Z = 0$, d. h. dieser Spannungszustand ist nur möglich, wenn die äußere Kraft senkrecht zu der als Z-Achse bezeichneten Richtung steht (oder wenn die äußere Kraft überhaupt

verschwindet) und die beiden ersten Gleichungen liefern

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} + X = 0; \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} + Y = 0.$$

Grenzt man ein rechtwinkliges Parallelepiped ab, von dem eine Kantenrichtung mit der Z-Richtung zusammenfällt, und trägt die beim ebenen Spannungszustande daran angreifenden Spannungen ein, so kann man die vorstehenden Gleichungen auch unmittelbar aus der Figur ablesen; es wird empfohlen, dies auszuführen.

2. Aufgabe. Aus den Gleichungen (6) *ist der Wert der Normalkomponenten σ_n der spezifischen Spannung p_n zu ermitteln!*

Lösung. Anstatt die Spannung p_n selbst auf die Normale n zu projizieren, kann man, um σ_n zu erhalten, auch ihre drei Komponenten nach den Koordinatenachsen auf n projizieren und aus den Projektionen die algebraische Summe nehmen. Dies liefert

$$\sigma_n = p_{nx} \cos(nx) + p_{xy} \cos(ny) + p_{nz} \cos(nz),$$

oder nach Einsetzen der Werte aus den Gleichungen (6)

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2(nx) + \sigma_y \cos^2(ny) + \sigma_z \cos^2(nz) + 2\,\tau_{xy} \cos(nx) \cos(ny) \\ + 2\,\tau_{xz} \cos(nx) \cos(nz) + 2\,\tau_{yz} \cos(uy) \cos(nz).$$

3. Aufgabe. Eine Welle, die gleichzeitig auf Biegung und auf Verdrehen beansprucht wird, erfahre an der gefährlichsten Stelle eine Biegungsspannung rechtwinklig zum Querschnitte von der Größe 300 atm und eine Schubspannung infolge der Verdrehung von 400 atm. Wie groß ist σ'_{max} und τ'_{max}?

Lösung. Der Spannungszustand ist ein ebener. Die Richtung der Stabachse wähle man zur Richtung der X-Achse, die Y-Achse lege man in die Richtung der Schubspannung im Querschnitte. Dann ist $\sigma_x = 300$, $\tau = 400$ und $\sigma_y = 0$ in die Gleichungen (12) und (14) einzusetzen. Man erhält $\sigma'_{max} = +\,577{,}2$ atm, $\sigma'_{min} = -\,277{,}2$ atm, $\tau'_{max} = 427{,}2$ atm.

Zweiter Abschnitt.

Elastische Formänderung. Beanspruchung des Materials.

§ 10. Das Elastizitätsgesetz.

Die im vorigen Abschnitte aufgestellten Gleichgewichtsbedingungen zwischen den Spannungskomponenten und alle daraus gezogenen Folgerungen gelten für jeden Körper, gleichgültig wie er sich im übrigen verhalten mag, also z. B. auch für einen Sandhaufen, für einen Tonklumpen, für Metalle und Steine, selbst für Flüssigkeiten und Gase. Die dort gefundenen Beziehungen genügen aber nicht, um den Spannungszustand zu berechnen, der unter gegebenen Umständen eintreten muß. Wir fanden nämlich, daß zur vollständigen Beschreibung des Spannungszustandes sechs Spannungskomponenten σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz} angegeben werden müssen, während zwischen diesen und den äußeren Kräften X, Y, Z nur die drei Gleichungen (5) bestehen. Der Spannungszustand ist daher in allen Fällen statisch unbestimmt im Sinne von § 1. Man muß, um ihn zu bestimmen, auf den Zusammenhang zwischen den Spannungskomponenten und den Formänderungen eingehen.

Was man damit bezweckt, ist leicht einzusehen. Um die Formänderung eines Körpers zu beschreiben, genügt es nämlich, für jeden Punkt des Körpers drei Zahlenwerte anzugeben. Die Gestaltänderung ist z. B. vollständig bestimmt, wenn man für jeden Punkt angibt, um wieviel er sich in den Richtungen von drei Koordinatenachsen verschoben hat. Kennt man also den Zusammenhang zwischen Gestaltänderung und Spannungszustand, so lassen sich immer die sechs unbekannten Größen,

durch die der Spannungszustand gekennzeichnet wird, auf drei unbekannte Größen, die die Gestaltänderung beschreiben, zurückführen.

Darauf kommt in der Tat die Anwendung des Elastizitätsgesetzes immer hinaus. Die Formänderung, die zu ihrer Beschreibung nur drei Variable braucht, kann immer leichter untersucht werden, als der Spannungszustand, in dem sechs voneinander unabhängige Veränderliche vorkommen. Zugleich erkennt man aber auch, wie wichtig es ist, die Zahl der unbekannten Größen gerade auf drei vermindern zu können, wenn man sich erinnert, daß zwischen den Spannungskomponenten an jeder Stelle die drei Gleichungen (5) erfüllt sind. Sobald man die Spannungskomponenten in den drei Verschiebungskomponenten, die die Gestaltänderung beschreiben, ausgedrückt und diese Werte in die Gleichungen (5) eingesetzt hat, stehen uns ebenso viele Gleichungen als Unbekannte zu Gebote. Mit der Lösung dieser Gleichungen wird auch der Spannungszustand bekannt. Freilich macht die wirkliche Auflösung gewöhnlich unüberwindliche Schwierigkeiten; auf jeden Fall ist aber der Nachweis von Wert, daß die Ausbildung des Spannungszustandes durch die in den Gleichungen (5) und in dem Elastizitätsgesetze ausgesprochenen Bedingungen schon vollständig geregelt ist, daß jede Unbestimmtheit aufhört und daß wir daher nicht nötig haben, nach neuen Naturgesetzen zu suchen, die uns bisher entgangen wären.

Der gesuchte Zusammenhang zwischen Formänderung und Spannungszustand kann nur durch die Erfahrung gegeben werden und er ist auch für verschiedene Körper oft wesentlich verschieden. Man gewinnt diese Erfahrung, indem man die Formänderungen an Versuchskörpern mißt, die durch abgewogene Belastungen hervorgebracht werden, dabei den Einfluß feststellt, den die Abmessungen des Probestücks auf den Zusammenhang zwischen Formänderung und Belastung haben und so zu einem Schlusse darüber gelangt, welche Formänderungen bei einem unendlich kleinen Parallelepiped, auf dessen Oberfläche gegebene Kräfte wirken, zu erwarten sind. Erst

nachdem man die Messungsergebnisse bis zu diesem Schlusse hin verarbeitet hat, ist die Grundlage gewonnen, auf der sich alle weiteren Untersuchungen der Festigkeitslehre aufbauen müssen.

Einer der häufigst vorgenommenen Versuche dieser Art besteht darin, daß man einen Eisenstab von rundem Querschnitte mit etwa 20 bis 25 mm Durchmesser und gegen 300 mm Länge, der an beiden Enden mit Köpfen versehen ist, in eine Festigkeitsmaschine einspannt und ihn einer allmählich anwachsenden Zugbelastung unterwirft. Zugleich mißt man die Dehnung, die eine in der Mitte des Stabes gelegene Meßstrecke von 100 bis 150 mm Länge erfährt. Anfänglich sind diese Dehnungen zu klein, um sie mit dem Zirkel abmessen zu können. Man muß sich daher einer Feinmeßvorrichtung bedienen. Bauschinger hat für diesen Zweck einen Spiegelapparat konstruiert, mit dessen Hilfe man die Längenänderungen der Meßstrecke bis auf etwa $^1/_{10000}$ mm genau beobachten kann. Abb. 9 zeigt die Anordnung dieses Apparates in schematischer Darstellung. S ist der Stab, an dem von zwei Seiten her bei A zwei etwas federnde Stangen F festgeklemmt werden, während die freien Enden von F mit geringem Drucke an zwei Hartgummiröllchen R anliegen. Diese Röllchen sind auf Spitzen in einem Rahmen gelagert, der an das andere Ende der Meßstrecke bei B festgeklemmt, in der Zeichnung aber fortgelassen ist. Wenn der Stab gezogen wird, verlängert sich die Meßstrecke AB und die Federn F setzen dabei die Röllchen R in Drehung. Mit jedem Röllchen ist ein Spiegel fest verbunden, der in der Zeichnung ebenfalls weggelassen ist. Auf jeden Spiegel ist ein Fernrohr mit Fadenkreuz gerichtet, das in etwa 1500 bis 2000 mm Entfernung von dem Spiegel aufgestellt ist. Am Gestelle der Fernrohre wird ein Maßstab befestigt, dessen Bild man im Spiegel beobachtet. Sobald sich der Spiegel ein wenig dreht, verschiebt sich das Bild des Maßstabes gegen das Fadenkreuz im Fernrohre, und man sieht leicht ein, wie man aus der Größe der abgelesenen Verschiebung auf die Drehung des Spiegels und daher auf die Verlängerung der Meßstrecke schließen kann. Wesentlich ist bei dieser Einrichtung, daß zwei Spiegel verwendet werden. Beide drehen sich nämlich, wie man aus der Abbildung erkennt, in entgegengesetzten Richtungen und im allgemeinen um gleiche Beträge. Es kann aber leicht vorkommen, daß bei der Ausführung des Versuchs sich auch der Stab im ganzen etwas dreht,

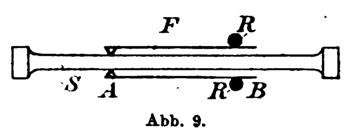


Abb. 9.

indem sich etwa die Anlage des Stabes an den Köpfen etwas ändert oder auch infolge von Verschiebungen oder Formänderungen der Teile der Festigkeitsmaschine selbst. Wenn man nur einen Spiegel verwendete, würde diese Drehung des ganzen Stabes zu unrichtigen Schlüssen über die Längenänderung der Meßstrecke verleiten. Bei zwei Spiegeln wird dagegen infolge einer solchen Drehung die Ablesung des einen Spiegels um ebensoviel vergrößert als die andere verkleinert wird und das Mittel aus beiden Ablesungen gibt daher den wahren Betrag der Längenänderung der Meßstrecke an.

Auf dieselbe Art kann man auch die Verkürzung eines Probestückes beobachten, das einer Druckbelastung unterworfen wird; auf andere Versuchsanordnungen, die ähnlichen Zwecken dienen, kann hier nicht eingegangen werden.

Bei einem Flußeisenstabe, der einem solchen Versuche unterworfen wird, zeigt sich, daß die Längenänderungen in demselben Verhältnisse anwachsen wie die Belastungen, so lange diese nicht zu groß sind. Außerdem findet man, daß die Meßstrecke nach Entfernung der Belastung genau wieder die ursprüngliche Länge annimmt. Ebenso verhalten sich Probekörper aus Stahl und auch solche aus Holz. Andere Stoffe zeigen dagegen ein abweichendes Verhalten.

Die Eigenschaft des Stoffes, die wir bei solchen Versuchen feststellen, wird als Elastizität bezeichnet. Da die Bezeichnung „elastisch", namentlich wenn ein Gradunterschied (mehr oder wenig elastisch) ausgedrückt werden soll, in verschiedener Bedeutung gebraucht wird, gebe ich zunächst den Sinn, den ich selbst mit dieser Bezeichnung verbinde, durch die folgenden Sätze an:

1) Elastizität ist allgemein die Fähigkeit eines Körpers, Formänderungsarbeit in umkehrbarer Weise aufzuspeichern.
2) Vollkommen elastisch verhält sich ein Körper bei einem gewissen Vorgange, wenn man die ihm durch äußere Kräfte zugeführte Formänderungsarbeit vollständig wieder in Form von mechanischer Energie aus ihm zurückgewinnen kann.
3) Der Grad der Elastizität eines nicht vollkommen elastischen Körpers wird durch das Verhältnis der in umkehrbarer Weise aufgespeicherten zu der gesamten ihm bei dem

betrachteten Vorgange durch die äußeren Kräfte zugeführten Energie bestimmt.

4) Kein Körper ist gegenüber allen Vorgängen, denen man ihn unterwerfen kann, vollkommen elastisch; ist er es bis zu einer gewissen Grenze hin und darüber hinaus nicht mehr, so wird diese Grenze als Elastizitätsgrenze bezeichnet (Abkürzung für die ausführlichere Bezeichnung „Grenze der vollkommenen Elastizität").

5) Die Elastizitätsgrenze ist nicht zu verwechseln mit der Proportionalitätsgrenze, die nur bei solchen Körpern in Betracht kommt, für die innerhalb eines gewissen Bereiches das Hookesche Gesetz der Verhältnisgleichheit zwischen Spannung und Formänderung gültig ist.

Diese Festsetzungen über den Wortgebrauch gründen sich auf den Begriff der Formänderungsarbeit. Darunter ist natürlich die Arbeit zu verstehen, die von den äußeren Kräften an dem Probestücke geleistet werden muß, um es in den gespannten Zustand zu versetzen. Bei dem Zugversuche, von dem vorher die Rede war, ist die Formänderungsarbeit, die zu einem gegebenen Spannungszustande gehört, gleich dem Mittelwerte des von der Maschine während der Verlängerung ausgeübten Zuges, multipliziert mit der erreichten Dehnung, oder in Zeichen

$$A = \int_0^x P\,dx, \tag{17}$$

wenn die Zugkraft mit P, die Dehnung mit x und die Formänderungsarbeit mit A bezeichnet wird.

„Umkehrbar" wird im ersten Satze, wie in allen Teilen der Physik ein solcher Vorgang genannt, der auch in entgegengesetzter Richtung unter sonst gleichen Bedingungen durchlaufen werden kann. Die Umkehrung des Belastungsvorganges bildet die Zusammenziehung des Probestabes beim Abnehmen der Belastung. Damit die Formänderungsarbeit umkehrbar aufgespeichert sei, muß der Stab bei allmählichem Abtragen der Belastung dieselbe Arbeit wieder nach außen hin abgeben,

die ihm zuerst zugeführt wurde. Damit dies auch bei jedem Zwischenzustande zutreffe, muß $dA = Pdx$ von derselben Größe bei der Belastung wie bei der Entlastung sein. Mit anderen Worten heißt dies auch, daß jedem gegebenen Zustande eine bestimmte Kraft P zugeordnet sein muß, gleichgültig ob dieser Zustand dadurch erreicht wird, daß man vom spannungslosen Zustande durch allmähliche Steigerung der Belastung zu ihm gelangt, oder ob er durch die Verminderung einer vorher aufgebrachten größeren Belastung erreicht wird.

Hierbei wird vorausgesetzt, daß sich die Formänderung langsam vollziehe. Bei schnell erfolgenden Formänderungen macht sich noch eine weitere Eigenschaft der festen Körper geltend, die man als ihre innere Reibung bezeichnet. Selbst bei geringen Formänderungen, die sich bei hinreichend langsamem Verlaufe als vollkommen elastisch erweisen, wird nämlich bei raschem Wechsel ein von der Geschwindigkeit der Änderung abhängiger Bruchteil der zugeführten Formänderungsarbeit nicht mehr in Gestalt von mechanischer Energie aufgespeichert oder zurückgewonnen, sondern in Wärme verwandelt oder, wie man sagt, zur Überwindung der inneren Reibung verbraucht. Bei fast allen Betrachtungen der Festigkeitslehre spielt aber diese noch wenig untersuchte Eigenschaft der festen Körper keine Rolle, weil es sich bei ihnen nur um langsam erfolgende Formänderungen handelt. Dagegen macht sich bei Stoßvorgängen und bei schnellen elastischen Schwingungen der Einfluß der inneren Reibung sehr deutlich bemerklich.

So lange die Belastung des vorher betrachteten Flußeisenstabes auf den qcm des Querschnitts nicht über etwa 1800 kg hinausgeht (die Grenze liegt bei einzelnen Eisensorten etwas verschieden), erweist er sich bei dem Zugversuche als so vollkommen elastisch, als dies die Genauigkeit der Messung überhaupt erkennen läßt. Bei gegossenen Metallen, namentlich bei Gußeisen, ferner bei Steinen, Zementkörpern und ähnlichen Stoffen trifft dies anfänglich nicht zu. Beim Abtragen der Belastung entspricht einer bestimmten Länge der Meßstrecke eine kleinere Kraft, als bei dem vorausgegangenen Aufbringen der Last. Die zugeführte Formänderungsarbeit wird also nur zum Teile wieder nach außen hin abgegeben; der Rest dieser Energie hat zur Herstellung einer bleibenden Zustands-

änderung gedient, wie man daraus erkennt, daß der Stab seine ursprüngliche Länge nicht wieder vollständig erreicht.

Sobald man aber die gleiche Belastung öfters aufgebracht und wieder entfernt hat, stellt sich auch bei diesen Stoffen nach und nach ein gleichbleibendes Verhalten ein, in dem sie sich ebenfalls in dem vorher erörterten Sinne als nahezu vollkommen elastisch erweisen. Bei den Untersuchungen der Festigkeitslehre ist es in der Regel nicht nötig, auf diese anfänglichen Erscheinungen Rücksicht zu nehmen, da der Spannungszustand, auf dessen Ermittelung es gewöhnlich ankommt, nur nach dem elastischen Teile der Formänderung, der bei Wegnahme der Belastung wieder verschwindet, zu beurteilen ist.

Auch die Zeit, während der die Belastung getragen wird, ist nicht ohne Einfluß auf die Formänderung des Körpers. Bei den zuletzt besprochenen Körpern, Steinen u. s. f. vergrößert sich die Formänderung allmählich noch etwas, wenn man die Belastung längere Zeit einwirken läßt, namentlich dann, wenn diese Körper nicht vorher schon in den zuvor erwähnten konstanten Zustand durch mehrmaligen Belastungswechsel gebracht sind. Besonders deutlich spricht sich der Einfluß der Zeit bei solchen Körpern wie Seile, Riemen, Fäden und Gewebe aus. Auch dann, wenn die Belastung wieder entfernt wird, nimmt der Körper nicht augenblicklich seine endgültige Gestalt an, sondern die Formänderungen dauern manchmal noch längere Zeit fort. Zugleich ist das Verhalten des Körpers gegen eine neu vorgenommene Belastung abhängig von den Vorgängen, denen er vorher unterworfen war, und auch von der Zeit, die seitdem verstrichen ist. Man faßt alle diese Erscheinungen unter der Bezeichnung der elastischen Nachwirkung zusammen. Sorgfältig untersucht sind diese Nachwirkungen besonders für Seidenfäden, wie sie zum Aufhängen von Magneten u. s. w. in physikalischen Instrumenten gebraucht werden. Bei den Stoffen, aus denen die Konstruktionen der Bau- und Maschineningenieure hergestellt werden, sind sie noch wenig erforscht. Glücklicherweise treten sie aber (abgesehen von den zuvor erwähnten Treibriemen, Hanfseilen u. s. f.) hier auch nur wenig hervor. Jedenfalls sind sie bei allen Stoffen, die auf Grund der vorher beschriebenen Versuche als „vollkommen elastisch“ befunden werden, ganz belanglos und es ist daher nicht gebräuchlich und auch nicht nötig, in der Festigkeitslehre näher darauf einzugehen. Gewalztes Eisen und Stahl zeigen zwar ebenfalls sehr deutliche elastische Nachwirkungen, wenn sie über die Elastizitätsgrenze hinaus belastet wurden; in den Konstruktionen vermeidet man solche Beanspruchungen aber fast immer und man kommt daher praktisch nicht

leicht in die Lage, sich um die Nachwirkungen kümmern zu müssen.

Ein Zugversuch und ebenso ein Druckversuch mit Flußeisen zeigt, wie schon vorher erwähnt, daß die Längenänderungen unterhalb der Elastizitätsgrenze den Belastungen proportional sind. Zugleich findet man, daß die Änderung der Meßstrecke der ursprünglichen Länge proportional und bei gleicher Belastung dem Querschnitte des Versuchsstabes umgekehrt proportional ist. Als bezogene oder spezifische Dehnung (oder Verkürzung) wollen wir die Längenänderung Δl geteilt durch die ursprüngliche Länge l bezeichnen und dafür stets den Buchstaben ε gebrauchen. Diese bezogene Dehnung ist noch von der bezogenen Spannung σ und dem Materiale abhängig und das Ergebnis des Versuches kann in der Gleichung

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \alpha\sigma \tag{18}$$

ausgesprochen werden. Die Konstante E heißt der Elastizitätsmodul des Materials, der reziproke Wert davon, α, der Dehnungskoeffizient. Die bezogene Dehnung ist als Verhältnis zweier Längen eine unbenannte Zahl, d. h. sie hat die Dimension Null. Daraus folgt, daß E eine Größe von der gleichen Art wie σ sein muß, also eine bezogene Spannung bedeutet und etwa in atm (d. h. in Kilogrammen auf ein qcm) ausgedrückt werden kann. Da ε innerhalb der Elastizitätsgrenze, d. h. so lange die Gleichung gilt, immer nur ein kleiner Bruch ist, muß E ein sehr großer Wert sein. Für Schweißeisen ist E etwa gleich 2000000 atm, für Flußeisen und Stahl etwa 2200000 atm und zwar gleichgültig ob es sich dabei um Zug oder Druck handelt.

Will man nicht mit den spezifischen Dehnungen und Spannungen, sondern mit den ganzen Beträgen rechnen, so kann Gl. (18) auch in der Form

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E} = \frac{P}{EF} \tag{19}$$

ausgesprochen werden, in der P die ganze auf den Querschnitt F kommende Kraft bedeutet.

Nicht alle Stoffe zeigen freilich das durch die Gl. (18) oder (19) ausgesprochene elastische Verhalten; auf die Abweichungen davon werde ich nachher noch zurückkommen. Früher, als man von diesen Abweichungen noch nichts wußte, sondern annahm, daß bei allen festen Körpern innerhalb ziemlich weiter Grenzen die Längenänderungen den Belastungen proportional seien, bezeichnete man das durch jene Gleichungen ausgesprochene Gesetz als das Elastizitätsgesetz. Jetzt kann aber diese allgemeinere Bezeichnung nicht mehr beibehalten werden; es soll daher das Hookesche Gesetz genannt werden, weil es zuerst von dem Physiker Hooke im Jahre 1678 in der Form „ut tensio sic vis" aufgestellt wurde.

Aber auch bei jenen Körpern, die dem Hookeschen Gesetze gehorchen, reichen die Formeln (18) und (19) noch nicht aus, um das elastische Verhalten vollständig zu beschreiben. Schon beim einachsigen Spannungszustande muß noch eine Ergänzung hinzutreten. Die Beobachtung lehrt nämlich, daß ein auf Zug oder Druck beanspruchter Probestab nicht nur in der Richtung der von Null verschiedenen Hauptspannung eine Längenänderung erfährt, sondern zugleich eine von entgegengesetztem Vorzeichen in jeder Querrichtung. Der Querschnitt eines auf Zug beanspruchten Stabes zieht sich zusammen. Man bezeichnet diese Erscheinung als die Querkontraktion. Das Umgekehrte erfolgt bei Druckbelastung.

Unmittelbare Messungen der (positiven oder negativen) Querdehnung sind schwieriger auszuführen, daher seltener vorgenommen und weniger zuverlässig, als die der (negativen oder positiven) Längsdehnung. Nach allem, was darüber bisher bekannt wurde, läßt sich indessen kaum bezweifeln, daß bei jenen Stoffen, die dem Hookeschen Gesetze für die Längsdehnung gehorchen, auch die Querdehnungen proportional mit der Hauptspannung in der Längsrichtung wachsen. Das Verhältnis zwischen beiden bezogenen Längenänderungen ist hiernach eine Konstante, die in der Folge stets mit $\frac{1}{m}$ bezeichnet werden wird, oder auch mit $-\frac{1}{m}$, wenn zugleich das ent-

gegengesetzte Vorzeichen beider Längenänderungen zum Ausdrucke gebracht werden soll. Nach den meisten Messungen liegt das Verhältnis zwischen $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$; für Schmiedeeeisen und Stahl setzt man gewöhnlich $m = 3^1/_3$, das Verhältnis also gleich 0,3. Bei Gußeisen ist dagegen m nicht konstant und meistens erheblich größer, bis etwa gegen 9 hinauf; Steine verhalten sich anscheinend ähnlich.

Auf Grund einer Hypothese, die den Spannungszustand aus Molekularkräften herzuleiten suchte, hatte Poisson das Verhältnis zu $\frac{1}{4}$ berechnet. Diese Ziffer wurde aber durch die Beobachtung nicht bestätigt; immerhin wird die Verhältnisziffer, so wie sie der Wirklichkeit entspricht, heute noch oft als die Poissonsche Konstante bezeichnet.

Vor allem reicht aber das Hookesche Gesetz allein nicht aus, den Zusammenhang zwischen Formänderung und Spannungszustand im allgemeinsten Falle oder selbst nur im Falle des ebenen Spannungszustandes darzustellen. Das Hookesche Gesetz bezieht sich zunächst nur auf den einachsigen Spannungszustand. Es muß daher noch eine Ergänzung hinzutreten. Zu diesem Zwecke nimmt man an, daß jede folgende Formänderung, so lange die Elastizitätsgrenze nicht überschritten ist, nur von der neu hinzugekommenen Belastung abhängig ist, daß also einer Übereinanderlagerung verschiedener Spannungszustände auch eine einfache Zusammenfügung der zu jedem einzelnen Spannungszustande, für sich genommen, gehörigen Formänderungen entspricht.

Eine Bestätigung dieses erweiterten Satzes, den wir als das Gesetz der Superposition bezeichnen wollen, durch unmittelbare Messungen ist schwer durchführbar. Mittelbar läßt sich der Satz dadurch prüfen, daß man die mit seiner Hilfe gezogenen Folgerungen an einem der Beobachtung zugänglichen Falle mit der Erfahrung vergleicht. Freilich hat man dann mit der Schwierigkeit zu kämpfen, daß die etwa beobachteten Abweichungen zwischen Rechnung und Beobachtung möglicherweise auch andere Ursachen haben könnten. Jedenfalls werde ich aber in der Folge, wie allgemein üblich,

die Gültigkeit des Superpositionsgesetzes für jene Körper voraussetzen, die beim einfachen Zug- oder Druckversuche dem Hookeschen Gesetze, das nur als besonderer Fall des Superpositionsgesetzes aufzufassen ist, gehorchen.

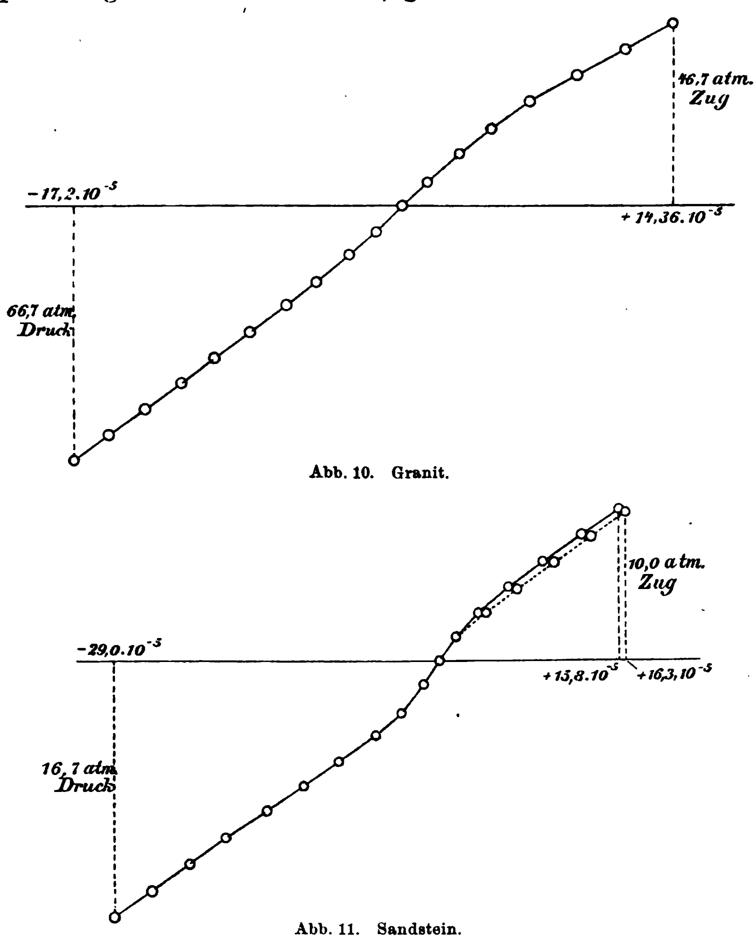


Abb. 10. Granit.

Abb. 11. Sandstein.

Wir wollen jetzt noch die Körper etwas näher ins Auge fassen, bei denen das elastische Verhalten nicht mit dem Hookeschen Gesetze übereinstimmt. Die Abbildungen 10 und 11 geben Versuchsergebnisse wieder, die ich bei der Prüfung von

großen Stäben aus Granit bezw. Sandstein auf Zug und auf Druck erhielt. Die Querschnitte der Stäbe waren Rechtecke von 20 × 30 cm Seitenlänge; vorausgehende Versuche hatten nämlich gezeigt, daß es nötig ist, Abmessungen von solcher Größe zu wählen, wahrscheinlich weil bei der Bearbeitung der Steine mit den gewöhnlichen Steinmetzwerkzeugen eine Lockerung der oberflächlichen Schichten eintritt, die die Resultate bei Probekörpern von kleinerem Querschnitte zu stark beeinflußt. Bei großen Querschnitten machen diese Oberflächenschichten im Verhältnisse zur ganzen Querschnittsfläche weniger aus. Die Abszissen stellen die beobachteten Dehnungen nach rechts hin vom Nullpunkte, die Verkürzungen bei den Druckversuchen nach links hin dar und die Ordinaten geben die zugehörigen Spannungen an, wobei Zugspannungen nach oben hin, Druckspannungen nach unten hin abgetragen wurden. Ehe eine Ablesung erfolgte, wurden die Steine durch wiederholte Belastung zuvor in einen konstanten Zustand übergeführt, sodaß sie sich bei dem Versuche vollkommen elastisch verhielten.

Auf der Zugseite der Abb. 11, die für den Sandstein gilt, ist neben der ausgezogenen Linie noch eine zweite punktiert eingetragen. Diese wurde zuerst erhalten und die ausgezogene dann, als der Stein nach den ersten Versuchen, durch die er stark auf Zug beansprucht worden war, eine 15stündige Ruhepause durchgemacht hatte. Der Unterschied zwischen beiden Linien gibt das Maß der elastischen Nachwirkung an. Dieser Unterschied ist hier ziemlich erheblich, offenbar wegen der Höhe der vorausgegangenen Zugbelastung, die nicht sehr weit von der Bruchbelastung entfernt war.

Für Körper, die dem Hookeschen Gesetze folgen, gibt eine Darstellung dieser Art eine gerade Linie. Bei den Steinen ist aber, wie man sieht, die Kurve S-förmig gekrümmt, anscheinend mit einem Wendepunkte im Ursprunge. Die elastischen Längenänderungen ε wachsen sowohl bei Zug- als bei Druckbelastung schneller als die zugehörigen Spannungen. Ganz ähnlich verhält sich auch das Gußeisen.

Um das Elastizitätsgesetz für solche Körper, wie sie hier in Frage kommen, durch eine Formel auszusprechen, muß man an Stelle von Gl. (18) allgemeiner

$$\varepsilon = f(\sigma) \text{ oder umgekehrt } \sigma = \varphi(\varepsilon) \tag{20}$$

setzen, wo f irgend eine Funktion und φ deren Umkehrung ist, die beide hinreichend genau mit jenen Abbildungen übereinstimmen. Der Begriff des Elastizitätsmoduls verliert hier seine ursprüngliche Bedeutung. Da man aber daran gewöhnt ist, das Verhalten der dem Hookeschen Gesetze gehorchenden Körper als das normale zu betrachten, Gl. (20) oder die Abb. 10 und 11 daher stets mit Gl. (18) bezw. mit den geradlinigen Darstellungen zu vergleichen, spricht man indessen auch bei Steinen von einem Elastizitätsmodul, der nun freilich eine neue Definition erhalten muß. Unglücklicherweise gibt es zwei ganz voneinander verschiedene Größen, von denen bald die eine, bald die andere als Elastizitätsmodul bezeichnet wird, ohne daß man immer aus dem Zusammenhange sofort erkennen könnte, welche von beiden eigentlich gemeint ist.

Differentiiert man nämlich Gl. (20) nach ε, so erhält man, wenn der Differentialquotient der Funktion φ durch einen angehängten Akzent bezeichnet wird,

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \varphi'(\varepsilon) \tag{21}$$

und der Wert auf der rechten Seite geht für den Fall des Hookeschen Gesetzes in den Elastizitätsmodul über. Man überträgt daher häufig diese Bezeichnung auch allgemein auf den Differentialquotienten $\varphi'(\varepsilon)$. Diese Größe kann auch geometrisch erläutert werden mit Hilfe der Richtung einer Tangente, die an die Kurven der Abb. 10 oder 11 im Punkte ε, σ gelegt wird.

Andererseits findet man aus Gl. (20) auch

$$\frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\sigma}{f(\sigma)} = \frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon}. \tag{22}$$

Auch dieser Wert geht in den Elastizitätsmodul über, wenn das Hookesche Gesetz gilt; mit demselben Rechte wie vorher kann daher die Bedeutung des Wortes „Elastizitätsmodul“ dahin verallgemeinert werden, daß es den Wert des Verhältnisses $\frac{\sigma}{\varepsilon}$ angeben soll. Geometrisch wird dieser Wert durch die Richtung der Sehne erläutert, die man vom Anfangspunkte zum Punkte ε, σ ziehen kann. Natürlich stimmen beide Deutungen des Wortes keineswegs miteinander überein, da die Richtung der Sehne von der Richtung

der Tangente abweicht. In jedem Falle ist übrigens der „Elastizitätsmodul“ keine Konstante mehr, sondern eine Funktion von σ.

Bei meinen eigenen experimentellen Untersuchungen habe ich mich immer dafür entschieden, den Elastizitätsmodul im Sinne von Gl. (22) zu gebrauchen, also das Verhältnis $\frac{\sigma}{\varepsilon}$ darunter zu verstehen. Dies geschah, weil man auf diese Weise unmittelbar von der Formänderung auf die Spannung umrechnen kann oder umgekehrt, und weil dies der Hauptgebrauch ist, den man von dem Elastizitätsmodul zu machen hat. Natürlich muß jeder Angabe des Elastizitätsmoduls hinzugefügt werden, auf welches Spannungsintervall sie sich bezieht.

Für sehr kleine Werte von σ und ε decken sich übrigens beide Definitionen hinreichend genau, um die eine durch die andere ersetzen zu können. Man kann auch geradezu den Elastizitätsmodul als den Wert

$$E = \left(\varphi'(\varepsilon)\right)_{\varepsilon=0} = \left(\frac{\sigma}{f(\sigma)}\right)_{\sigma=0} \tag{23}$$

definieren und erhält dann wieder eine Konstante. Bei manchen Erscheinungen, die man in der Elastizitätslehre untersucht, z. B. bei den Schallschwingungen, kommen nur kleine Formänderungen und Spannungen in Betracht und in solchen Fällen kann man mit Vorteil von der Definition in Gleichung (23) Gebrauch machen. Außerdem kann man auch durch Versuche über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in festen Körpern den durch Gl. (23) definierten Wert von E direkt bestimmen.

Für manche Zwecke ist es nützlich, für die Funktionen f oder φ in Gl. (20) aus den Versuchsergebnissen eine analytische Form abzuleiten, die sich ihnen hinlänglich genau anschließt. Das ist schon in sehr verschiedener Weise geschehen. Ich halte mich hier nicht mit einer Aufzählung der einzelnen hierzu vorgeschlagenen Formeln auf, sondern verweise den Leser, der sich näher darüber unterrichten will, auf einen Aufsatz von Prof. Mehmke in der Zeitschr. f. Math. u. Physik, 1897, S. 327.

Für Gußeisen und Steine hat sich bisher am besten die zwar schon früher bekannte, aber erst durch die Arbeiten der Herren v. Bach und Schüle gut bestätigte und dadurch in allgemeinere Aufnahme gebrachte sogenannte Potenzformel bewährt. In dieser Formel wird

$$\varepsilon = \alpha \sigma^m \tag{24}$$

gesetzt, worin α und m Konstanten bedeuten, die für jedes einzelne Material gesondert aus den Versuchsergebnissen berechnet werden

müssen. Als Beispiel erwähne ich, daß Herr Schüle für eine bestimmte Gußeisensorte, von der ich Elastizitätsmessungen veröffentlicht hatte, auf Grund der Versuchsziffern nachträglich für die Zugelastizität

$$\alpha = \frac{1}{2662000} \text{ und } m = 1{,}147$$

und für die Druckelastizität

$$\alpha = \frac{1}{2661000} \text{ und } m = 1{,}133$$

ermittelt hat. Es zeigte sich in der Tat, daß die Potenzformel bei Einsetzung dieser Werte in recht guter Übereinstimmung mit den Versuchsziffern stand.

So wie die Potenzformel gewöhnlich angeschrieben wird, ist sie freilich nicht homogen in den Dimensionen. Man kann diesem Mangel aber leicht abhelfen, indem man an Stelle von Gl. (24)

$$\varepsilon = \alpha \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m \tag{25}$$

setzt, worin σ_0 eine neue Konstante bedeutet, die nur bei den bisherigen Anwendungen stillschweigend gleich 1 atm gesetzt wurde. Daraus geht hervor, daß auch σ in Gl. (24) in atm auszudrücken ist und daß α und m absolute Zahlen sind. Will man die Formel auf ein anderes Maßsystem umrechnen, so muß man sie zunächst durch Gl. (25) ersetzen und dann darin $\sigma_0 = 1$ atm durch den entsprechenden Spannungswert in dem anderen Maßsysteme ausdrücken. Dann kann sie zwar wieder auf die Form von Gl. (24) gebracht werden; die Zahl α nimmt aber dabei einen anderen Wert an.

Übrigens handelt es sich bei der Potenzformel nicht um ein streng gültiges Naturgesetz, sondern nur um eine brauchbare Interpolationsformel. Man darf daher auch nicht erwarten, daß alle Folgerungen, die sich aus ihr ziehen lassen, z. B. die, daß für unendlich kleine Spannungen der Elastizitätsmodul unendlich groß ausfiele, richtig wären.

Schließlich sei noch darauf hingewiesen, daß mit der Aufstellung des Potenzgesetzes, selbst wenn es genau zuträfe, noch keine vollständige Beschreibung des elastischen Verhaltens der betreffenden Körper gewonnen wäre. Er müßte vielmehr noch eine ergänzende Angabe über die Querkontraktion oder Querdehnung hinzutreten, da auch die Poisson'sche Verhältniszahl $\frac{1}{m}$ bei solchen Materialien veränderlich ist. Und ferner müßte man noch fest-

stellen, welches andere Gesetz an die Stelle des Superpositionsgesetzes zu treten hätte, für den Fall, daß zwei oder drei lineare Spannungszustände mit senkrecht zueinander stehenden Hauptrichtungen zusammen wirken, d. h. also für den Fall des ebenen oder des allgemeinsten Spannungszustandes. Daß nämlich das Superpositionsgesetz nur in Verbindung mit dem Hookeschen Gesetze gültig sein kann, ist ohne weiteres klar, da das Superpositionsgesetz das Hookesche schon als speziellen Fall in sich schließt.

§ 11. **Einfache Längsspannung und einfache Schubspannung.**

Für ein Material, das dem Hookeschen Gesetze gehorcht, haben wir nach dem Vorhergehenden einen Zusammenhang zwischen elastischer Formänderung und Spannungszustand, der für die beiden einfachsten Fälle hier noch einmal übersichtlich angegeben werden soll. — Für den Fall der einfachen Längsspannung (einachsiger Spannungszustand) geht ein in der Hauptrichtung herausgeschnittenes unendlich kleines Parallelepiped in die durch punktierte Linien in Abb. 12 angedeutete Gestalt über und mit Rücksicht auf die in diese Abbildung eingeschriebenen Bezeichnungen hat man

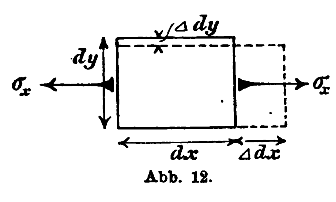


Abb. 12.

$$\Delta dx = \alpha \, dx \, \sigma_x = \frac{1}{E} \, dx \, \sigma_x, \tag{26}$$

oder auch, unter Einführung der spezifischen Dehnung ε_x,

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{\sigma_x}{E}. \tag{27}$$

Zugleich tritt eine Querverkürzung ε_y auf, die nach jeder Querschnittsrichtung gleich ist und

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta dy}{dy} = -\frac{1}{m} \frac{\sigma_x}{E} \tag{28}$$

gesetzt werden kann.

Wenn sich das Material, wie seither schon stillschweigend überall vorausgesetzt wurde, nach allen Richtungen gleich verhält, oder wenn es, wie man in diesem Falle sagt, **isotrop** ist, hat E für jede Längsrichtung und m für jede Querrichtung den gleichen

Wert. Das elastische Verhalten des Stoffes wird daher durch diese beiden Konstanten vollständig beschrieben. Ein solches Verhalten zeigen nicht alle Naturkörper. Ein Kristall verhält sich nach verschiedenen Richtungen im allgemeinen verschieden. Der Wert von E oder von m hängt hier wesentlich von der Lage der Hauptrichtung des Spannungszustandes gegen die kristallographischen Achsen ab. Wer also z. B. die elastischen Eigenschaften des Steinsalzes studieren will, darf sich mit dem vorausgehenden einfacheren Ansatze nicht begnügen, sondern muß ihn unter Berücksichtigung des genannten Umstandes entsprechend verallgemeinern. Im allgemeinsten Falle sind die beiden elastischen Konstanten E und m für die anisotropen Körper, die im übrigen dem Hookeschen Gesetze gehorchen, durch 21 voneinander verschiedene Konstanten zu ersetzen. Dadurch werden die Gleichungen der Elastizitätslehre für solche Körper sehr verwickelt. Wenn aber auch der Physiker, der sich mit solchen Fragen beschäftigt, die Erörterung dieser umständlicheren Gleichungen nicht umgehen kann, darf der Techniker davon absehen, da die wichtigsten Baustoffe gewöhnlich als nahezu isotrop angesehen werden können. Eine Ausnahme macht namentlich das Holz. Für Konstruktionsteile aus Holz sind aber in der Regel nur ganz einfache Aufgaben zu lösen, die ein tieferes Eingehen auf diese Unterschiede nicht nötig machen. Überdies ist auch das elastische Verhalten des Holzes durch mancherlei zufällige Umstände — durch eingewachsene Äste, den Einfluß des Standortes, die Lage des Stabes im Baume u. s. f. — so erheblichen Schwankungen unterworfen, daß jede feinere Berechnung, die auf den Unterschied der elastischen Eigenschaften nach verschiedenen Richtungen eingehen wollte, gegenstandslos würde.

Außer den Änderungen der Kantenlängen kann man auch die Änderung untersuchen, die das Volumen des unendlich kleinen Parallelepipeds bei der einfachen Längsspannung erfährt. Die senkrecht zur Papierfläche der Abb. 12 stehende Kante sei mit dz bezeichnet. Dann entsteht aus dem Volumen $dx\,dy\,dz$ infolge der Formänderung das Volumen

$$dx(1+\varepsilon_x)dy(1+\varepsilon_y)dz(1+\varepsilon_z).$$

Beim Ausmultiplizieren braucht man auf die Produkte der ε nicht zu achten, da die ε alle sehr kleine Brüche sind, deren Produkte neben ihnen selbst nicht in Betracht kommen; man erhält daher

$$dx\,dy\,dz(1+\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z).$$

Die Summe der drei ε gibt daher das Verhältnis der Volumenzunahme zum ursprünglichen Volumen an. Wir nennen diese Verhältniszahl die kubische Ausdehnung und bezeichnen sie mit e, also

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \tag{29}$$

Diese Betrachtung gilt allgemein. Für den einachsigen Spannungszustand erhält man mit Rücksicht auf Gl. (28), und da $\varepsilon_z = \varepsilon_y$ ist,

$$e = \frac{m-2}{m}\,\varepsilon_x = \frac{m-2}{mE}\,\sigma_x. \tag{30}$$

Aus dieser Gleichung läßt sich auch ein Schluß auf die Größe ziehen, die man für die Verhältniszahl m mindestens anzunehmen hat. Es läßt sich nämlich nicht erwarten, daß das Volumen des Parallelepipeds durch einen Zug vermindert würde, also e negativ würde. Mindestens muß daher $m = 2$ angenommen werden. In diesem Falle nennen wir den elastischen Körper inkompressibel oder raumbeständig, denn bei jedem beliebigen Spannungszustande bleibt sein Volumen konstant. In der Tat ist aber, wie schon vorher erwähnt wurde, m in der Regel größer; gewöhnlich liegt es zwischen 3 und 4.

Durch Übereinanderlagerung von zwei oder im allgemeinsten Falle von drei einachsigen Spannungszuständen, deren Hauptrichtungen senkrecht aufeinander stehen, kann man jeden beliebigen anderen Spannungszustand ableiten und die vorausgehenden Gleichungen genügen daher stets zur Berechnung der elastischen Formänderungen isotroper Körper, die dem Superpositionsgesetze gehorchen. Für die Anwendung ist es aber bequem, den häufig vorkommenden Fall der reinen Schubbeanspruchung noch besonders zu betrachten.

Auf die Seitenfläche des in Abb. 13 gezeichneten Parallelepipeds mögen nur die Schubspannungen τ einwirken. Die Kanten erfahren dabei keine Längenänderungen, dagegen ändern sich die Winkel. Die Änderung des ursprünglich rechten Winkels sei mit γ bezeichnet. Wir denken uns γ, wie überhaupt alle Winkel, mit denen wir hier zu tun haben, wenn nichts anderes gesagt wird, in Bogenmaß ausgemessen, also

so, daß γ eine Verhältniszahl ist, deren Multiplikation mit dem Radius den zugehörigen Bogen liefert. Da die elastischen Formänderungen immer als sehr klein angesehen werden können, ist γ ein sehr kleiner echter Bruch. Der Kosinus eines sehr kleinen Winkels weicht nur um eine Größe höherer Ordnung von der Einheit ab; wir können daher die Formänderung auch so beschreiben, daß sich die obere Seite des Rechtecks der Abb. 13 längs ihrer Richtungslinie verschiebt. So ist die Figur auch in der Tat gezeichnet, obschon in ihr der Winkel γ der Deutlichkeit wegen größer angenommen werden mußte. Wenn der Winkel γ diese Größe wirklich erreichte, müßte man auch darauf achten, daß sich die obere Rechteckseite etwas senkte. So aber kommt diese Senkung nicht in Betracht, und wir können daher sagen, daß sich bis auf Größen höherer Ordnung genau das Volumen des Parallelepipeds bei der reinen Schubbeanspruchung nicht ändert.

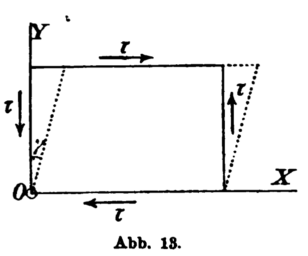


Abb. 13.

Wenn das Hookesche Gesetz gilt, ist die Formänderung der Spannung proportional, und wir können daher

$$\gamma = \beta\tau = \frac{\tau}{G} \tag{31}$$

setzen. Hier tritt eine neue elastische Konstante des Materials G auf. Sie heißt der Schubelastizitätsmodul, ihr reziproker Wert β der Schiebungskoeffizient. Aus Gl. (31), in der γ eine absolute Zahl ist, erkennt man, daß G eine Größe von derselben Art wie τ ist. Der Schubelastizitätsmodul hat daher ebenso wie der Zugelastizitätsmodul die Dimensionen einer spezifischen Spannung und ist in atm oder in Kilogrammen auf 1 qcm anzugeben. Der numerische Wert von G muß ebenfalls, wie Gl. (31) lehrt, ein sehr beträchtlicher sein. Deshalb rechnet man besser mit ihm als mit seinem reziproken Werte β, dem Schiebungskoeffizienten, der immer ein sehr kleiner Bruch ist und daher unbequem anzuschreiben ist, wenn man in den üblichen Einheiten rechnet.

Aus den vorhergehenden Betrachtungen folgt schon, daß G durch die Werte von E und m, die für sich schon genügen, das elastische Verhalten eines Materials vollständig zu beschreiben, mitbestimmt sein muß. Wir wollen jetzt die Gleichung ableiten, die diesen Zusammenhang ausspricht. Dazu erinnern wir uns, daß nach den Untersuchungen in § 9 der Fall der „reinen Schubspannung" einem ebenen Spannungszustande entspricht, dessen Hauptspannungen in Schnittrichtungen auftreten, die Winkel von 45° mit der Schnittrichtung der Schubspannung bilden. Beide Hauptspannungen sind der Schubspannung der Größe nach gleich; die eine ist eine Zug-, die andere eine Druckspannung.

Wir denken uns nun einen Würfel in den Richtungen der Hauptspannungen herausgeschnitten. Die zur Z-Achse senkrechte Ansichtsfläche des Würfels geht unter dem Einflusse dieser Hauptspannungen in ein Rechteck über, das in Abb. 14 gezeichnet ist. Mit Δa ist die elastische Änderung der Würfelkante a bezeichnet. Längs der Diagonalebenen des Würfels tritt die Schubspannung τ auf und die Änderung des Winkels zwischen den Diagonalen kann entweder mit τ in Beziehung gebracht und nach Gl. (31) festgestellt oder aus den Änderungen der Seitenlängen berechnet werden. Die Gleichsetzung der beiden auf diesen Wegen gefundenen Ausdrücke liefert die gesuchte Beziehung zwischen den elastischen Konstanten.

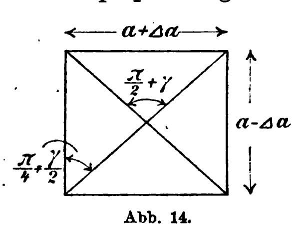


Abb. 14.

Wenn nur die eine Hauptspannung vorhanden wäre, könnte man das von ihr bewirkte Δa nach Gl. (26) sofort berechnen; man erhielte

$$\frac{1}{E} a \sigma_x \quad \text{oder} \quad \frac{1}{E} a \tau,$$

da $\sigma_x = \tau$ zu setzen ist. Dazu kommt aber noch die Querdehnung, die von der anderen Hauptspannung herrührt, und

die $\frac{1}{m}$ des vorigen Betrages ausmacht. Im Ganzen ist also

$$\varDelta a = \frac{m+1}{mE} a\tau.$$

Wenn die Winkel zwischen den Diagonalen um γ von einem Rechten abweichen, unterscheidet sich der Winkel zwischen einer Diagonale und einer Seite um $\frac{\gamma}{2}$ von einem halben Rechten. Diese Größenbezeichnung ist auch in die Abbildung eingetragen. Man hat jetzt

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{a + \varDelta a}{a - \varDelta a},$$

oder, wenn man die Tangente der Winkelsumme nach einer bekannten goniometrischen Formel entwickelt und dabei für $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$ den Winkel $\frac{\gamma}{2}$ selbst einsetzt, was zulässig ist, weil der Winkel nur sehr wenig von Null abweicht, auch

$$\frac{1 + \frac{\gamma}{2}}{1 - \frac{\gamma}{2}} = \frac{a + \varDelta a}{a - \varDelta a},$$

woraus sofort

$$\gamma = 2\frac{\varDelta a}{a} = \frac{2(m+1)}{mE}\tau$$

folgt. Andererseits ist aber nach Gl. (31) auch

$$\gamma = \frac{\tau}{G},$$

und der Vergleich beider Werte liefert

$$G = \frac{m}{2(m+1)} E. \tag{32}$$

Für $m = 4$ wird $G = 0{,}4\,E$ und für $m = 3$ wird $G = \frac{3}{8}\,E$, was hier noch besonders angemerkt werden mag.

Die Messung des Schubelastizitätsmoduls durch einen unmittelbaren Versuch ist nicht wohl ausführbar. Man kann ihn aber, wie wir später sehen werden, aus Torsionsversuchen berechnen. Der so gefundene Wert stimmt nicht immer gut mit Gl. (32)

überein. Andererseits ist aber Gl. (32) aus einer Betrachtung gefunden, die für ein Material, das dem Hookeschen Gesetze bezw. dem Superpositionsgesetze allgemein gehorcht, unbedingt gültig sein muß. Abweichende Ergebnisse von Torsionsversuchen müssen daher notwendig — soweit sie nicht von Messungsfehlern herrühren — entweder dadurch bedingt sein, daß das untersuchte Material jenem Elastizitätsgesetze nicht gehorcht oder daß die zur Berechnung aus dem Torsionsversuche angewendete Formel unrichtig ist. Wer Versuche über die Verdrehungselastizität anstellt, sollte dies stets im Auge behalten.

§ 12. Elastische Dehnungen in verschiedenen Richtungen.

Wir denken uns im ursprünglichen Zustande des Körpers eine unendlich kleine Kugel aus ihm abgegrenzt. Nehmen wir zunächst an, daß der Körper hierauf einem einachsigen Spannungszustande unterworfen wird, so muß diese Kugel in ein Rotationsellipsoid übergehen. Denn bezeichnen wir die Koordinaten eines Punktes der Kugel mit x, y, z und legen die X-Achse in die Hauptrichtung, so wird jedes x nach Gl. (26) in demselben Verhältnisse vergrößert und jedes y und z nimmt ab in einem Verhältnisse, das $\frac{1}{m}$ des vorigen beträgt, wenn wir uns σ_x positiv denken. Drücken wir hiernach die ursprünglichen Werte von x, y, z in den geänderten aus und setzen sie in die Kugelgleichung ein, so geht diese in die Gleichung eines Ellipsoids über. Wenn zwei oder drei zueinander rechtwinklige lineare Spannungszustände übereinander gelagert werden, wodurch wir zu den allgemeineren Fällen aufsteigen, ändert sich immer noch jedes x in demselben Verhältnisse, jedes y in einem anderen konstanten Verhältnisse und jedes z in einem dritten. Daraus schließen wir wie vorher, daß die Kugel in ein Ellipsoid und zwar jetzt in ein dreiachsiges übergegangen ist. Ferner folgt daraus auch, daß die größten oder kleinsten Werte der Dehnungen oder überhaupt der spezifischen Längenänderungen in den Hauptrichtungen des Spannungszustandes auftreten. Man bezeichnet diese Dehnungen auch als die H a u p t d e h n u n g e n.

Für den Fall des ebenen Spannungszustandes soll die Dehnung in einer beliebigen Richtung, die in der XY-Ebene enthalten ist, noch näher berechnet werden. Die Koordinatenachsen sollen mit den Hauptrichtungen zusammenfallen. Ein in der Ebene des Spannungszustandes enthaltenes Rechteck geht in ein anderes über, das in Abb. 15 durch gestrichelte Linien angegeben ist. Wir berechnen die kleine elastische Änderung Δds der Diagonale ds, die den Winkel φ mit der X-Achse bildet. Zunächst ist

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

Abb. 15.

und wir finden daraus Δds am einfachsten, indem wir durch partielle Differentiation von ds nach dx und dy den Zuwachs berechnen, der den Änderungen Δdx und Δdy entspricht. Wir erhalten

$$\Delta ds = \frac{dx \Delta dx + dy \Delta dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{dx}{ds} \Delta dx + \frac{dy}{ds} \Delta dy,$$

woraus die spezifische Dehnung ε_φ in der Richtung φ durch Division mit ds gefunden wird, also

$$\varepsilon_\varphi = \frac{\Delta ds}{ds} = \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 \cdot \frac{\Delta dx}{dx} + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 \cdot \frac{\Delta dy}{dy} = \varepsilon_x \cos^2 \varphi + \varepsilon_y \sin^2 \varphi, \quad (33)$$

und dies wird in der Tat, wie schon vorher gezeigt war, zu einem Maximum oder Minimum für $\varphi = 0$ und für $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

An Stelle dieser Ableitung kann man übrigens Δds und hiermit ε_φ auch aus einer geometrischen Betrachtung an Hand der Abb. 15 leicht entnehmen.

§ 13. Die Anstrengung des Materials.

Die Ausführung von Festigkeitsberechnungen verfolgt den Zweck, ein Urteil über die Bruchgefahr zu gewinnen. Um die Rechenergebnisse in diesem Sinne deuten zu können, muß man aber wissen, in welchem Zusammenhange die Gefahr eines Bruches mit dem Spannungs- oder Formänderungszustande des Materials steht. Für den einfachsten Fall, nämlich für den einachsigen Spannungszustand, ist darüber kein Zweifel möglich.

Man weiß aus der Erfahrung, wie groß die Spannung werden darf, ohne daß entweder die Elastizitätsgrenze überschritten oder ohne daß sofort ein Bruch herbeigeführt wird. Von dieser gefährlichen Spannung wird nur ein gewisser Bruchteil als zulässig angesehen. Früher war es üblich, die zulässige Spannung nach der Bruchbelastung zu bemessen und das Verhältnis zwischen beiden Werten wurde als der Sicherheitskoeffizient bezeichnet. Für gewalztes Eisen wurde dieser etwa $= \frac{1}{5}$, für Holz $= \frac{1}{10}$ gewählt u. s. f. Heute ist man von dieser Art der Abschätzung wenigstens bei den Metallen zurückgekommen und zwar namentlich deshalb, weil sich herausstellte, daß man den Bruch schon durch viel kleinere Belastungen herbeiführen kann, wenn man diese öfters aufbringt und wieder entfernt. Die Glieder in den Konstruktionen des Ingenieurs sind aber meistens in dieser Weise beansprucht und dadurch hat der frühere Begriff der Bruchbelastung, also jener Belastung, die bei nur einmaligem Aufbringen den Bruch herbeiführt, sehr an Bedeutung verloren; man würde sich einer unter Umständen sehr gefährlichen Täuschung hingeben, wenn man diese Belastung zum Ausgangspunkte für die Bemessung der zulässigen Beanspruchung machen wollte. In der Tat wäre ja nicht wohl abzusehen, weshalb man sich damit begnügen sollte, nur den fünften Teil der Festigkeit des Eisens auszunutzen; ein kühner Konstrukteur könnte durch diese Art der Abschätzung leicht dazu verleitet werden, mit der Beanspruchung viel höher hinaufzugehen.

Versuche über den Einfluß von oft wiederholten Belastungen sind zuerst von Wöhler angestellt worden. Später hat Bauschinger acht verschiedene Eisensorten untersucht, für die er die in der folgenden Zusammenstellung aufgeführten Festigkeitszahlen erhalten hat. Dabei ist (im Anschlusse an die von Weyrauch eingeführten Bezeichnungen) unter „Tragfestigkeit“ die auf 1 qcm bezogene Spannung in kg zu verstehen, durch die schon bei einmaligem Aufbringen der Bruch herbeigeführt wird. Als „Ursprungsfestigkeit“ ist jene Spannung bezeichnet, die im Wechsel mit dem spannungslosen Zustande

gerade noch beliebig oft ertragen wird. Eine Spannung, die über der Ursprungsfestigkeit liegt, führt bei öfterem Wechsel schließlich den Bruch herbei und zwar um so eher, je näher sie der Tragfestigkeit kommt. Die Zahl der Wechsel, die erforderlich sind, wenn die Spannung nicht sehr viel über der Ursprungsfestigkeit liegt, beläuft sich gewöhnlich auf Millionen. Unter der „Schwingungsfestigkeit“ endlich ist jener größte Wert der bezogenen Spannung zu verstehen, der bei Wechsel zwischen Zug und Druck (beide von der gleichen Größe) gerade noch beliebig oft ertragen wird. Die Schwingungsfestigkeit ist gewöhnlich etwas niedriger als die Ursprungsfestigkeit; nach den zuverlässigsten Versuchen, die von Bauschinger herrühren, ist der Unterschied aber viel geringer, als man früher auf Grund der wenigen Ergebnisse Wöhlers angenommen hatte.

Nr.	Eisensorte	Tragfestigkeit (auf Zug)	Ursprungsfestigkeit (für Zug)	Schwingungsfestigkeit
1	Schweißeisen	3480	2000	1770
2	Flußeisen	4360	2400	1980
3	Nicht näher bezeichnet (Eisen)	4050	2200	1980
4	desgl.	4020	2400	2260
5	Thomasstahl	6120	3000	3000
6	Schienenstahl	5940	2800	2800
7	Kesselblech-Flußeisen	4050	2400	1900
8	Nicht näher bezeichnet (Eisen)	3350	2200	1600

Die niedrigsten Festigkeitsziffern in der Spalte für die Schwingungsfestigkeit stimmen ungefähr mit der Lage der Elastizitätsgrenze bei den betreffenden Materialien überein. Daraus ist der Schluß zu ziehen, daß die Elastizitätsgrenze für die Sicherheit der Konstruktionen weit maßgebender ist, als die durch einen Zugversuch ermittelte Tragfestigkeit. Man erhält daher ein viel zutreffenderes Urteil über den heute üblichen Sicherheitsgrad der eisernen Tragkonstruktionen, wenn man sagt, daß ungefähr die Hälfte der Belastung an der

Elastizitätsgrenze oder auch etwas darüber als zulässig angesehen wird, als wenn man sich auf die Tragfestigkeit bezieht.

Mit diesen Bemerkungen ist die Frage für den einachsigen Spannungszustand, so weit als sie hier überhaupt erörtert werden kann, erledigt. Um die Bruchgefahr für einen anderen Spannungszustand bemessen zu können, reichen die angegebenen Erfahrungsziffern aber nicht aus, und in der Tat ist auch noch nicht endgültig festgestellt, wovon sie hier abhängt. Vielmehr sind verschiedene Ansichten hierüber aufgestellt worden, von denen zwar die eine immer noch die meisten Anhänger zählt, ohne daß es aber bisher gelungen wäre, eine durchaus einwandfreie Entscheidung zu treffen.

Eine ältere, aber jetzt fast allgemein verlassene Ansicht ging dahin, daß die Bruchgefahr nach der größten der drei Hauptspannungen, ohne Rücksicht auf die beiden anderen Hauptspannungen zu bemessen sei. Nach einer zweiten Ansicht soll die Bruchgefahr von der größten Winkeländerung γ oder, was auf dasselbe hinauskommt, von der größten Schubspannungskomponente τ_{max} abhängen. Die dritte Ansicht, die heute die meisten Anhänger zählt, erblickt dagegen in der größten Dehnung ε, die bei der Formänderung zu Stande kommt, das Maß für die Bruchgefahr. Dazu ist in den letzten Jahren noch eine vierte Theorie von Mohr*) gekommen, die zwischen der zweiten und dritten Ansicht eine mittlere Stellung einnimmt und auf die ich mir vorbehalte, im fünften Bande noch ausführlicher einzugehen. Einstweilen genügt die Bemerkung, daß es nach Mohr auf die größte und die kleinste der drei unter Berücksichtigung des Vorzeichens der Größe nach geordneten Hauptspannungen ankommt und zwar nach einem aus den Versuchsergebnissen erst noch näher zu ermittelnden Gesetze, während die dazwischen liegende mittlere Hauptspannung keinen Einfluß haben soll.

Die in den Handbüchern der Konstruktionslehre aufgestellten Festigkeitsformeln beruhen heutzutage fast ausschließ-

*) Zeitschr. d. V. D. Ing. 1900, S. 1524.

lich auf der dritten dieser Annahmen, setzen also voraus, daß die größte Dehnung für die Bruchgefahr maßgebend sei. Danach muß ich mich, um Verwirrungen zu vermeiden, in diesem Buche ebenfalls richten. Da aber die Ansicht von Mohr wenigstens bei den wichtigsten Baustoffen des Ingenieurs bisher noch am besten mit den Versuchsergebnissen übereinstimmt, werde ich, wo es darauf ankommt, auf die Abweichungen der Mohrschen Schätzung der Bruchgefahr von der sonst üblichen hinweisen.

§ 14. Die reduzierten Spannungen.

Wenn man auch die Dehnung ε als Maß der Anstrengung des Materials ansieht, ist man darum noch nicht genötigt, überall unmittelbar mit dieser Größe zu rechnen. Dies wäre oft sehr unbequem. Denn die Festigkeitsberechnung liefert zunächst gewöhnlich nur die Spannungen, und es bedürfte erst noch einer besonderen Umrechnung, um daraus die Dehnungen abzuleiten. Zu dieser Umrechnung müßte auch der Elastizitätsmodul bekannt sein, den man für viele Materialien in der Praxis nur ganz annähernd kennt oder über den man sich auch oft ganz im unklaren befindet.

Um solchen Umständlichkeiten aus dem Wege zu gehen, hat man ein sehr einfaches Auskunftsmittel gefunden. Man vergleicht irgend einen beliebigen Spannungszustand, dessen Zulässigkeit untersucht werden soll, mit einem einachsigen Spannungszustande, dessen Dehnung gleich der größten Hauptdehnung bei jenem ist. Nach der Annahme, von der wir hier, wie üblich, in erster Linie ausgehen wollen, ist das Material in beiden Fällen in gleichem Maße angestrengt, und wir können daher diese Anstrengung in jedem Falle durch eine einzige Ziffer zum Ausdrucke bringen, indem wir die Spannung des gleichwertigen einachsigen Spannungszustandes angeben. Diese Spannung wird als die reduzierte Spannung bezeichnet und sie wird praktisch als Maß für die Anstrengung des Materials genommen.

Für den Fall des ebenen Problems seien σ_{I} und σ_{II} die

beiden Hauptspannungen (Zug wie immer positiv, Druck negativ gerechnet). Für die Hauptdehnungen erhält man dann nach dem Hookeschen Elastizitätsgesetze, das hier als gültig vorausgesetzt wird,

$$\varepsilon_I = \frac{1}{E}\left(\sigma_I - \frac{1}{m}\sigma_{II}\right); \qquad \varepsilon_{II} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{II} - \frac{1}{m}\sigma_I\right).$$

Die reduzierte Spannung muß entweder so gewählt werden, daß die von ihr hervorgebrachte Dehnung mit ε_I oder mit ε_{II} übereinstimmt, je nachdem der eine oder der andere Wert größer, oder (bei verschiedenen Vorzeichen) gefährlicher für den Bestand des Materials ist. Daraus folgt, daß

$$\sigma_{red} = \sigma_I - \frac{1}{m}\sigma_{II} \quad \text{oder} \quad \sigma_{red} = \sigma_{II} - \frac{1}{m}\sigma_I \tag{34}$$

zu setzen ist, mit dem Vorbehalte, daß von beiden Werten der ungünstigere zu nehmen ist.

Beim allgemeinsten Spannungszustande mit den Hauptspannungen σ_I, σ_{II}, σ_{III} erhält man ebenso

$$\varepsilon_I = \frac{1}{E}\left(\sigma_I - \frac{1}{m}\sigma_{II} - \frac{1}{m}\sigma_{III}\right)$$

und daraus

$$\sigma_{red} = \sigma_I - \frac{1}{m}(\sigma_{II} + \sigma_{III}). \tag{35}$$

Eigentlich wären wieder drei Werte anzugeben, aus denen man wie vorher den ungünstigsten auszuwählen hätte. Anstatt dessen kann man aber auch die eine Formel (35) beibehalten, wenn man nur hinzufügt, daß die Bezeichnungen σ_I, σ_{II}, σ_{III} so auf die drei Hauptspannungen zu verteilen sind, daß in Gl. (35) der gefährlichste Wert für die reduzierte Spannung herauskommt. In praktisch vorkommenden Fällen sieht man gewöhnlich auf den ersten Blick, welche der drei Hauptspannungen man zu diesem Zwecke als σ_I in Gl. (35) einsetzen muß.

Eine ihrer bekanntesten Anwendungen findet diese Betrachtung auf die Berechnung des zulässigen Betrages von τ bei der einfachen Schubbeanspruchung. Wenn man mit σ_{zul} den zulässigen Betrag der einfachen Zug- oder Druckbeanspruchung (wenn beide voneinander verschieden sind, den

kleineren von beiden) bezeichnet, kann man die zulässige Schubbeanspruchung τ_{zul} daraus in folgender Weise berechnen. Die Hauptspannungen bei der reinen Schubbeanspruchung sind bekanntlich von gleicher Größe mit τ selbst und im Vorzeichen einander entgegengesetzt. Nun soll τ so gewählt werden, daß die Anstrengung des Materials gerade mit der zulässigen, d. h. daß σ_{red} in Gl. (34) mit σ_{zul} übereinstimmt. Dies gibt, wenn man $\sigma_I = + \tau_{zul}$ und $\sigma_{II} = - \tau_{zul}$ einsetzt, die Gleichung

$$\sigma_{zul} = \tau_{zul} + \frac{1}{m} \tau_{zul},$$

woraus

$$\tau_{zul} = \frac{m}{m+1} \sigma_{zul} \tag{36}$$

gefunden wird.

Mit $m = 4$ wird dies $\tau_{zul} = 0{,}8 \sigma_{zul}$ und mit $m = 3\frac{1}{3}$ wird $\tau_{zul} = 0{,}77 \sigma_{zul}$. Dagegen wird nach Mohr für Schmiedeisen und Stahl

$$\tau_{zul} = 0{,}5 \, \sigma_{zul},$$

ein mit den Versuchsergebnissen besser übereinstimmender Wert. Gerade in diesem Falle führt die Mohrsche Theorie zu einer besonders großen Abweichung gegenüber der üblichen Abschätzung der Bruchgefahr mit Hilfe der reduzierten Spannungen, weil nämlich im Falle der einfachen Schubbeanspruchung die beiden Hauptspannungen von entgegengesetztem Vorzeichen sind und daher weit auseinander liegen. Die Mohrsche Theorie deckt sich in diesem Falle mit der Ansicht, daß die Bruchgefahr von der größten Winkeländerung oder der größten Schubbeanspruchung abhänge.

Gl. (34) kann ferner dadurch umgestaltet werden, daß man σ_I und σ_{II} in den auf ein beliebig gerichtetes Koordinatensystem der XY bezogenen Spannungskomponenten σ_x, σ_y, τ ausdrückt und diesen Wert in die Formel einführt. Dies soll hier nur noch für den besonderen Fall weiter ausgeführt werden, daß $\sigma_y = 0$ ist. Dieser Fall kommt nämlich bei den praktischen Anwendungen öfters vor, z. B. bei einer Welle, die gleichzeitig gebogen und verdreht wird. Die Biegung erzeugt Spannungen senkrecht zum Querschnitte, also etwa σ_x, und die

Verdrehung bringt Schubspannungen τ hervor, während Normalspannungen σ_y oder σ_z zwischen den einzelnen Fasern des Stabes nicht vorkommen. Man führt die Berechnung in solchen Fällen derart durch, daß man zuerst σ_x und τ berechnet — und zwar nach den später dafür erst noch aufzustellenden Lehren, worauf es aber an dieser Stelle nicht ankommt — und dann daraus die reduzierte Spannung σ_{red} ermittelt. Es ist, da solche Fälle öfters vorliegen, nützlich, diese Umrechnung hier ein für alle Male vorzunehmen. Dazu sind also σ_x und τ als bereits bekannt vorauszusetzen.

Aus Gl. (12) S. 30 erhält man für $\sigma_y = 0$ die Hauptspannungen

$$\sigma_{\mathrm{I}} = \tfrac{1}{2}\left(\sigma_x + \sqrt{4\tau^2 + \sigma_x^2}\right); \qquad \sigma_{\mathrm{II}} = \tfrac{1}{2}\left(\sigma_x - \sqrt{4\tau^2 + \sigma_x^2}\right).$$

Durch Einsetzen in Gl. (34) folgt daraus

$$\sigma_{red} = \frac{m-1}{2m}\sigma_x \pm \frac{m+1}{2m}\cdot\sqrt{4\tau^2 + \sigma_x^2}. \tag{37}$$

Man erhält das obere oder das untere Wurzelvorzeichen, je nachdem man den einen oder den anderen der beiden in Gl. (34) für σ_{red} angegebenen Werte nimmt. Nach den vorhergehenden Bemerkungen muß man immer jenes Vorzeichen wählen, das den ungünstigsten Wert für σ_{red} liefert. Auf der Zugseite einer zugleich gebogenen und verdrehten Welle wird man daher das positive, auf der Druckseite das negative Vorzeichen zu nehmen haben usf.

Mit $m = 4$ geht Gl. (37) über in

$$\sigma_{red} = \tfrac{3}{8}\sigma_x \pm \tfrac{5}{8}\sqrt{4\tau^2 + \sigma_x^2}$$

und in dieser Form wird sie gewöhnlich angeschrieben. Dagegen wird für

$$m = 3\tfrac{1}{3} : \sigma_{red} = 0{,}35\,\sigma_x + 0{,}65\sqrt{4\tau^2 + \sigma_x^2}.$$

Hierzu ist noch zu bemerken, daß auch in diesem Falle die Anstrengung des Materials nach der Mohrschen Theorie höher einzuschätzen ist, als nach diesen Formeln. Weitere Ausführungen hierüber findet man in der Dissertation von P. Roth „Die Festigkeitstheorien und die von ihnen abhängigen Formeln des Maschinenbaues“, Leipzig 1902.

§ 15. Die bezogene Formänderungsarbeit.

Man denke sich wieder ein unendlich kleines Parallelepiped in den Hauptrichtungen herausgeschnitten. Die Spannungen am Umfange sind für diesen Teil des Körpers als äußere Kräfte anzusehen, die bei der Formänderung eine Arbeit leisten, da sie längs eines gewissen Weges wirken. Dadurch wird dem Körperelemente eine Energiemenge zugeführt, die darin aufgespeichert wird und bei der Umkehrung des Vorgangs wieder daraus gewonnen werden kann. Man bezeichnet diese Energie auch als die potentielle Energie des gespannten Körpers oder auch als das Potential der elastischen Kräfte. Wir wollen anstatt dessen an der in der Technik üblicheren Bezeichnung „Formänderungsarbeit" festhalten. Wird die Formänderungsarbeit auf die Volumeneinheit des Körpers an der betreffenden Stelle bezogen, so soll dies durch die nähere Bezeichnung „bezogene" oder „spezifische" Formänderungsarbeit ausgedrückt werden.

Für den linearen Spannungszustand ist die gesamte Formänderungsarbeit des Körpers schon in Gl. (17) angegeben. Wenn der Körper dem Hookeschen Gesetze gehorcht, ist die Kraft P in jedem Augenblicke der zugehörigen Längenänderung proportional. In Gl. (17)

$$A = \int_0^{\Delta l} P dx$$

können wir daher, wenn der der gesamten Längenänderung Δl entsprechende Wert von P mit P' bezeichnet wird,

$$P = P' \frac{x}{\Delta l}$$

setzen und die vorige Gleichung geht damit über in

$$A = \frac{P'}{\Delta l} \int_0^{\Delta l} x dx = \tfrac{1}{2} P' \Delta l. \tag{38}$$

Die bezogene Formänderungsarbeit wird hieraus gefunden wenn wir diese Gleichung auf einen Würfel anwenden, dessen

Seite gleich der Längeneinheit ist. Dann geht P' über in σ und Δl in ε, also, wenn die spezifische Formänderungsarbeit mit A bezeichnet wird,

$$\mathsf{A} = \tfrac{1}{2}\sigma\varepsilon = \tfrac{1}{2}E\varepsilon^2 = \frac{\sigma^2}{2E}. \tag{39}$$

Für den Fall des ebenen Problems mit den Hauptspannungen σ_x und σ_y finden wir A auf demselben Wege. Die Dehnungen in den Hauptrichtungen werden

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \frac{1}{m}\sigma_y\right); \qquad \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \frac{1}{m}\sigma_x\right).$$

Auf die Dehnung in der dritten Hauptrichtung kommt es nicht an, da die ihr entsprechende Hauptspannung Null ist. Auf die Rechtecke von den Kantenlängen $dy\,dz$ wirken die Kräfte $\sigma_x\,dy\,dz$ in entgegengesetzter Richtung. Wenn sich der Abstand dx zwischen beiden Rechtecken um $\varepsilon_x dx$ vergrößert, leisten die beiden Kräfte zusammengenommen eine Arbeit, die gleich diesem Wege multipliziert mit dem Mittelwerte der Kräfte während des allmählichen Anwachsens des Spannungszustandes ist. Dieser Mittelwert ist, wie im vorausgehenden Falle, gleich der Hälfte der zuletzt erreichten Größe, die Arbeit daher

$$\tfrac{1}{2}\sigma_x\,dy\,dz\cdot\varepsilon_x\,dx \qquad \text{oder} \qquad \frac{1}{2E}\left(\sigma_x^2 - \frac{1}{m}\sigma_x\sigma_y\right)dx\,dy\,dz.$$

Dazu kommt der ebenso zu bildende Ausdruck für die Arbeit der Hauptspannung in der Y-Richtung. Addiert man beide Beträge und streicht man den Faktor $dx\,dy\,dz$, womit die Arbeit auf die Volumeneinheit bezogen wird, so erhält man

$$\mathsf{A} = \frac{1}{E}\left(\frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{2} - \frac{1}{m}\sigma_x\sigma_y\right). \tag{40}$$

Für den allgemeinsten Fall mit drei von Null verschiedenen Hauptspannungen würde man ebenso erhalten

$$\mathsf{A} = \frac{1}{E}\left(\frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2}{2} - \frac{1}{m}(\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z)\right). \tag{41}$$

Auch bei diesen Betrachtungen ist es wieder nützlich, den Fall der reinen Schubbeanspruchung gesondert zu untersuchen.

Am Umfange des in Abb. 13 S. 55 herausgezeichneten Körperelementes wirken nur die Schubspannungen τ. Wenn wir uns die Formänderung so vorgenommen denken, wie es durch punktierte Linien in Abb. 13 angedeutet ist — also ohne weitere Verschiebung oder Drehung des Volumenelementes, die auf die ganze geleistete Arbeit keinen Einfluß haben kann, da die Spannungen am Umfange ein Gleichgewichtssystem miteinander bilden — kommt nur die Arbeit der Schubspannungen an der oberen Seite in Betracht, da sich die untere Seite überhaupt nicht verschiebt, während die Verschiebungen der anderen Seiten senkrecht zur Kraftrichtung stehen. Der Mittelwert der Kraft während der Formänderung ist aus denselben Gründen wie vorher gleich der Hälfte des zuletzt erreichten Wertes zu setzen, also gleich

$$\tfrac{1}{2}\tau\, dx\, dz$$

und der Weg, der in der Richtung der Kraft zurückgelegt wird, gleich $\gamma\, dy$. Die Formänderungsarbeit ist daher

$$\tfrac{1}{2}\tau\, \gamma\, dx\, dy\, dz.$$

Die bezogene Formänderungsarbeit wird daraus durch Streichen des Faktors $dx\, dy\, dz$, der das Volumen des betrachteten Parallelepipeds angibt, gefunden, also mit Berücksichtigung von Gl. (31)

$$\mathsf{A} = \tfrac{1}{2}\tau\gamma = \tfrac{1}{2}G\gamma^2 = \frac{\tau^2}{2G}. \qquad (42)$$

Der Ausdruck (42) muß mit dem in Gl. (40) angegebenen Werte übereinstimmen, wenn man in diesem die Hauptspannungen σ_x und σ_y gleich $+\tau$ bezw. $-\tau$ setzt. Die so erhaltene Gleichung

$$\frac{1}{E}\left(\frac{\tau^2+\tau^2}{2} + \frac{1}{m}\tau\cdot\tau\right) = \frac{\tau^2}{2G}$$

liefert nach ihrer Auflösung nach G wieder die in § 11 auf ganz anderem Wege abgeleitete Beziehung

$$G = \frac{m}{2(m+1)}E$$

zwischen den drei Elastizitätskoeffizienten.

Ein feineres Empfinden wird in diesen Schlüssen noch eine gewisse Lücke herausfühlen. Es ist nämlich noch nicht darauf hingewiesen worden, daß die Formänderungsarbeit für ein beliebig gestaltetes Volumenelement dem Volumen proportional, von der besonderen Gestalt des Elementes aber unabhängig ist. Bis zu einem gewissen Grade läßt sich dies zwar schon daraus entnehmen, daß die potentielle Energie an den materiellen Inhalt des Elementes gebunden ist und daß man in der Tat nur auf Grund einer solchen Vorstellung von einer spezifischen Formänderungsarbeit sprechen kann. Ein direkter Nachweis bleibt aber immerhin wünschenswert. Diesen kann man dadurch führen, daß man sich das Volumenelement in Elemente höherer Ordnung zerlegt denkt, deren Kanten nach den Hauptrichtungen orientiert sind. Summiert man die Arbeitsleistungen aller Spannungen auf den Seitenflächen dieser Elemente höherer Ordnung über das ganze ursprünglich gegebene Volumenelement, so heben sich alle Glieder gegeneinander auf, die auf Flächen kommen, in denen zwei Elemente höherer Ordnung aneinander grenzen, da die Kräfte nach dem Gesetze der Aktion und Reaktion einander entgegengesetzt, die Wege aber die gleichen sind. Die Summe ist daher gleich den Arbeitsleistungen der Spannungen am Umfange des Elementes erster Ordnung, woraus der Satz folgt.

Aufgaben.

4. Aufg. Ein Zugstab aus Flußeisen werde mit 1000 atm gespannt; wie groß ist die größte in ihm auftretende Winkeländerung γ in Sekunden ausgedrückt, wenn $E = 2\,200\,000$ atm und $m = 3\frac{1}{3}$ gesetzt wird?

Lösung. In § 7 folgte aus den Gleichungen (15), daß die größte Schubspannung beim linearen Spannungszustande gleich der Hälfte der Hauptspannung, hier also gleich 500 atm ist. Der Schubelastizitätsmodul berechnet sich nach Gl. (32) hier zu

$$G = \frac{3\frac{1}{3}}{2 \cdot 4\frac{1}{3}} \cdot 2\,200\,000 = 846\,000 \text{ atm}$$

und damit die Winkeländerung γ nach Gl. (31)

$$\gamma = \frac{500 \text{ atm}}{846\,000 \text{ atm}} = 591 \cdot 10^{-6},$$

und da $1'' = 4{,}85 \cdot 10^{-6}$ in Bogenmaß ist,

$$\gamma = 122'' = 2'\,2''.$$

Hierzu bemerke ich noch, daß Gl. (31) zunächst für den Fall der reinen Schubspannung abgeleitet wurde, der hier allerdings nicht vorliegt. Die Formel bleibt aber auch hier gültig, weil Normalspannungen, die zu den Schubspannungen noch hinzukommen, für sich genommen keine Winkeländerungen bewirken, und weil man nach dem Superpositionsgesetze die ganze Formänderung immer aus den einzelnen Änderungen zusammensetzen kann, die den verschiedenen Komponenten irgend eines Spannungszustandes entsprechen.

5. *Aufg.* *Ein Granitwürfel von 6 cm Seite wird in der Prüfungsmaschine mit 24 t belastet. Wie groß ist die Beanspruchung auf Schub und wie groß ist die Winkeländerung* γ, *wenn* $E = 300\,000$ atm *und* $m = 4$ *gesetzt wird?*

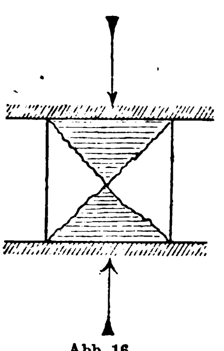


Abb. 16.

Lösung. Man findet wie in voriger Aufgabe $\tau = 333$ atm, $G = 120\,000$ atm und $\gamma = \frac{1}{360} = 0^0 9' 30''$.

Bemerkung. Die Frage steht in Verbindung mit einer Ansicht, die früher über die Art, wie der Bruch eines solchen Steinwürfels erfolge, sehr verbreitet war. Der Steinwürfel zerfällt nämlich so in Bruchstücke, daß zwei oft sehr schön ausgebildete Pyramiden entstehen, die in Abb. 16 durch horizontale Schraffierung hervorgehoben sind. Die Seitenflächen der Pyramiden, also die Hauptbruchflächen, folgen ungefähr jenen Schnittrichtungen, für die τ den größten Wert annimmt. Man schloß daraus, daß bei dem Druckversuche in Wirklichkeit die Schubfestigkeit überwunden würde. — Indessen ist auch eine andere Erklärung dieser Erscheinung möglich. Beim Zusammendrücken des Würfels tritt gleichzeitig eine Querdehnung ein. Nun ist Steinmaterial im Stande, nur eine gewisse spezifische Dehnung zu ertragen, Granit etwa $60 \cdot 10^{-5}$, bevor eine dauernde Trennung eintritt. Dabei ist es möglicherweise gleichgültig, ob diese Dehnung durch einen Zug in der einen Richtung oder durch einen Druck in der Querrichtung zu Stande kommt. Der Bruch wäre also dann dadurch zu erklären, daß sich auf den vier freien Seitenflächen Stücke loslösen, so daß die Pyramiden übrig bleiben. Hierbei muß aber noch auf einen anderen, wichtigen Umstand geachtet werden. Die Druckflächen des Steines sind nämlich durch die Reibung zwischen ihnen und den Druckplatten der Prüfungsmaschine gehindert, sich der Quere nach auszudehnen. Dadurch kommt in der Nähe der Druckflächen

überhaupt kein einachsiger Spannungszustand heraus. Auch die benachbarten Stellen werden an der freien Querdehnung gehindert; man muß daher erwarten, daß der Bruch in der Mitte beginnt, bis wohin sich diese Hemmung der Querdehnung am wenigsten erstreckt. Beachtet man, daß die Druckflächen durch die Reibung an jeder Querdehnung gehindert sind, daß also ein auch über sie sich erstreckender Riß kaum zu erwarten ist, so wird die nahezu pyramidenförmige Gestalt der Hauptbruchreste leicht verständlich. Zugleich gibt diese Betrachtung auch Rechenschaft über eine andere Erscheinung, die man bei der Prüfung von Steinen auf Druckfestigkeit beobachtet. Man findet nämlich die Festigkeit abhängig von dem Verhältnisse der Höhe des Probekörpers zur Grundfläche; je höher er ist, desto geringer ist gewöhnlich die Festigkeit. Da sich der Einfluß der durch Reibung festgehaltenen Grundflächen bei höheren Prismen in der Mitte nicht mehr so fühlbar machen kann, als bei niederen, erklärt sich diese Erscheinung ganz ungezwungen. Zugleich erwähne ich noch, daß ich auch einmal Druckversuche an Steinwürfeln mit geschmierten Druckflächen vorgenommen habe. In diesem Falle spaltet sich der Stein nicht in schiefer Richtung sondern in gerader, so daß er in eine Reihe von Prismen zerfällt. Die Bruchlast ist in diesem Falle weit geringer ($^1/_2$ oder selbst $^1/_3$ bis $^1/_4$) von der bei nicht geschmierten Druckflächen beobachteten. — Es ist üblich, die Druckfestigkeit von Steinen immer nur an Probekörpern in Würfelform mit ungeschmierten Druckflächen zu ermitteln. Bei der Deutung der so erhaltenen Ziffern ist auf die vorausgehenden Darlegungen wohl zu achten.

6. *Aufg. Ein Zylinder von nachgiebigerem Material (kleinem E) ist in den zylindrischen Hohlraum einer ihn auf dem Mantel dicht umschließenden (nahezu) starren Masse eingepaßt und wird der Längsrichtung nach mit 200 atm zusammengedrückt. Wie groß ist der Druck, den er am Mantel auf die ihn umschließende Masse ausübt a) wenn $m = 4$, b) wenn $m = 2$ gesetzt wird?*

Lösung. Man hat hier $\sigma_I = 200$ und $\sigma_{II} = \sigma_{III} = x$. Die Unbekannte x muß so gewählt werden, daß $\varepsilon_{II} = \varepsilon_{III} = 0$ wird, also

$$\varepsilon_{II} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{II} - \frac{1}{m}(\sigma_I + \sigma_{III})\right) = 0; \qquad x - \frac{1}{m}(x + 200) = 0.$$

Für $m = 4$ folgt daraus $x = 66\frac{2}{3}$ atm und für $m = 2$ wird $x = 200$ atm. Im letzten Falle ist der Seitendruck genau so groß, als wenn der zylindrische Hohlraum von einer Flüssigkeit ausgefüllt wäre.

7. Aufg. Wie groß ist die reduzierte Spannung für den in Aufg. 3, S. 36 angegebenen Fall, wenn $m = 4$ gesetzt wird?

Lösung. Für $m = 4$ ist nach § 14

$$\sigma_{red} = \frac{3}{8}\sigma_x + \frac{5}{8}\sqrt{4\tau^2 + \sigma_x^2},$$

und hier ist $\sigma_x = 300$, $\tau = 400$ atm zu setzen. Setzt man dies ein, so wird $\sigma_{red} = 646$ atm.

8. Aufg. Eine an beiden Enden durch starke Böden geschlossene zylindrische Röhre stehe unter einem inneren Überdrucke. Die Zugspannung der Rohrwand in tangentialer Richtung betrage 800 atm, die in der Längsrichtung 400 atm. Wie groß ist die reduzierte Spannung für $m = 3\frac{1}{3}$?

Lösung. Nach Gl. (34) hat man

$$\sigma_{red} = 800 - \frac{1}{3\frac{1}{3}} \cdot 400 = 680 \text{ atm.}$$

Anmerkung. Gewöhnlich berechnet man zwar die Anstrengung der Rohrwand in dieser Weise. Nach der Theorie von Mohr macht aber, da die drei Hauptspannungen hier + 800, + 400, 0 sind, die mittlere Hauptspannung + 400 gar nichts aus und die Anstrengung ist so zu beurteilen, als wenn die Hauptspannung von 800 atm allein vorkäme.

9. Aufg. Eine sich von einem Ende zum anderen gleichmäßig verjüngende Zugstange von den Endquerschnitten F_1 und F_2 und der Länge l wird mit der Kraft P zentrisch gezogen. Wie groß ist die Formänderungsarbeit?

Lösung. Der Querschnitt F im Abstande x von jenem Ende, an dem der Querschnitt $= F_1$ ist, berechnet sich auf

$$F = \left(\sqrt{F_1} + \frac{x}{l}\left(\sqrt{F_2} - \sqrt{F_1}\right)\right)^2.$$

Für die Formänderungsarbeit dA in einem Abschnitte der Stange von der Länge dx, also von dem Volumen Fdx, erhält man nach Gl. (39)

$$dA = Fdx\frac{\sigma^2}{2E} = \frac{P^2}{2E}\cdot\frac{dx}{F}$$

und die Formänderungsarbeit A der ganzen Stange wird daraus durch Integration nach x gefunden, also

$$A = \frac{P^2}{2E}\int_0^l \frac{dx}{\left[\sqrt{F_1} + \frac{x}{l}\left(\sqrt{F_2} - \sqrt{F_1}\right)\right]^2}.$$

Mit Benutzung der Integralformel

$$\int \frac{dx}{(ax+b)^2} = -\frac{1}{a(ax+b)}$$

geht dies über in

$$A = -\frac{P^2}{2E}\cdot\frac{l}{\sqrt{F_2}-\sqrt{F_1}}\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{F_1}+\frac{x}{l}(\sqrt{F_2}-\sqrt{F_1})}\right]_0^l$$

$$= \frac{P^2}{2E}\cdot\frac{l}{\sqrt{F_1 F_2}}.$$

Setzt man $F_2 = F_1$, so erhält man

$$A = \frac{P^2 l}{2EF_1}$$

und dies ist der Ausdruck für die Formänderungsarbeit einer Stange vom konstanten Querschnitte F_1. Unterscheiden sich F_1 und F_2 nur wenig voneinander, so kann man genau genug das geometrische Mittel $\sqrt{F_1 F_2}$ durch das arithmetische $\frac{F_1+F_2}{2}$ ersetzen.

10. *Aufg. Eine an beiden Enden festgehaltene Zugstange war ursprünglich mit 600 atm gespannt. Dann wird sie um* 50° C. *abgekühlt. Um wieviel erhöht sich die spezifische Formänderungsarbeit, wenn* $E = 2\cdot 10^6$ atm *und der Ausdehnungskoeffizient des Eisens* $= \frac{1}{80000}$ *für* 1° C. *gesetzt wird?*

Lösung. Wenn die Enden der Stange frei wären, hätte die Abkühlung eine spezifische Verkürzung ε zur Folge, die

$$\varepsilon = \frac{50}{80000} = \frac{1}{1600}$$

wäre. Um diese Verkürzung zu verhindern, muß eine Zugspannung in der Stange auftreten, die für sich genommen eine elastische Dehnung von demselben Betrage zu Stande bringt. Diese Spannung σ ist nach Gl. (18)

$$\sigma = E\varepsilon = 2\cdot 10^6\cdot\frac{1}{1600} = 1250 \text{ atm.}$$

Durch die Abkühlung wird also die Zugspannung von ursprünglich 600 atm auf 1850 atm erhöht. Bei vielen Eisensorten liegt dies schon über der Proportionalitätsgrenze, wir wollen indessen annehmen, daß dies hier nicht zutrifft, da wir die Form-

änderungsarbeit nicht mehr genau berechnen können, sobald jene Grenze überschritten ist.

Nach Gl. (39) ist im ursprünglichen Zustande

$$A = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{600^2}{4 \cdot 10^6} \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{cm}^2} = 0{,}09 \frac{\mathrm{cm\,kg}}{\mathrm{cm}^3}.$$

Die im letzten Ausdrucke gegebene Bezeichnung der Dimensionen weist darauf hin, daß A eine Arbeitsleistung (cm kg) bezogen auf ein Einheitsvolumen (cm^3) darstellt. — Setzt man an Stelle von 600 atm jetzt 1850 atm in den vorstehenden Ausdruck ein, so wird

$$A = \frac{1850^2}{4 \cdot 10^6} = 0{,}856 \frac{\mathrm{cm\,kg}}{\mathrm{cm}^3}.$$

Die Formänderungsarbeit hat sich daher um 0,766 erhöht. Diese potentielle Energie ist nicht durch Aufwand von Arbeit äußerer Kräfte hervorgebracht worden, kann sich aber gleichwohl jederzeit in solche verwandeln. Sie hat ihren Ursprung in einem Teile der dem Stabe bei der Temperaturerhöhung zugeführten Wärme, der in mechanische Energie umgewandelt wird. Man erkennt daraus, daß die spezifische Wärme des Stabes im gespannten und im ungespannten Zustande etwas verschieden sein muß, und daß überhaupt ein Zusammenhang zwischen dem elastischen Formänderungszustande und dem Wärmezustande bestehen muß. Die weitere Erörterung dieses Zusammenhanges ist eine Aufgabe der mechanischen Wärmetheorie; in der Festigkeitslehre sind diese Erscheinungen ohne Bedeutung, und man kann sie daher hier gewöhnlich vollständig vernachlässigen. Es möge nur noch bemerkt werden, daß ein Stab, der ohne Zufuhr oder Ableitung von Wärme gedehnt wird, sich dabei ein wenig abkühlt. In der Festigkeitsmaschine bemerkt man diese Abkühlung nicht, da sie sich nur auf Tausendstel Grade beläuft. Dies gilt indessen nur so lange, als die Elastizitätsgrenze nicht überschritten wird. Von da ab wird die äußere Arbeit nicht mehr ausschließlich in Form von potentieller Energie aufgespeichert, sondern zum Teile in Wärme umgewandelt, die beim Abreißen eines Stabes eine recht beträchtliche Temperaturerhöhung bewirkt.

Dritter Abschnitt.

Biegung des geraden Stabes.

---

§ 16. Begriff der Biegung.

An einem stabförmigen Körper, der auch an einigen Stellen mit rechtwinklig dazu aufgesteckten Handhaben oder Kurbeln versehen sein kann, mögen sich beliebig gegebene äußere Kräfte im Gleichgewichte halten. Man denke sich den Stab durch irgend einen Querschnitt in zwei Teile zerlegt. Jeder dieser Teile muß dann immer noch im Gleichgewicht bleiben, wenn man den anderen Teil entfernt, dafür aber in der Schnittfläche äußere Kräfte anbringt, die mit den vorher im Querschnitte übertragenen Spannungen an jeder Stelle genau übereinstimmen.

Um die daraus hervorgehenden Gleichgewichtsbedingungen zur Berechnung der Spannungen zu verwerten, faßt man zunächst an dem betrachteten Teile des Stabes die gegebenen äußeren Kräfte nach den Lehren der Statik zusammen. Je nach dem Ergebnisse der Zusammensetzung unterscheidet man verschiedene Beanspruchungsarten des Stabes. Erhält man eine Resultierende, die durch den Schwerpunkt des Querschnitts geht und mit der Stabachse zusammenfällt, so ist der Stab an dieser Stelle auf Zug oder Druck beansprucht, ein Fall, mit dem wir uns schon früher beschäftigt haben. Ergeben die Lasten eine Resultierende, die in der Ebene des Querschnitts liegt und durch den Schwerpunkt geht, so ist der Stab in diesem Querschnitte auf Schub oder Abscheren beansprucht; dieser Fall kann aber immer nur in einzelnen Querschnitten eintreten. Der Fall der reinen Biegung liegt vor, wenn sich

die äußeren Kräfte zu einem Kräftepaare zusammenfassen lassen, dessen Ebene durch die Stabachse geht. Endlich wird der Stab auf Torsion, Verwindung oder Verdrehung beansprucht, wenn die äußeren Kräfte ein Kräftepaar liefern, dessen Ebene zur Querschnittsebene parallel ist.

Im allgemeinen können alle diese vier Beanspruchungsarten oder wenigstens einige von ihnen zusammen wirken. Man spricht dann von einer zusammengesetzten Festigkeit. Man denke sich nämlich jede äußere Kraft parallel mit sich selbst nach dem Schwerpunkte des Querschnittes verlegt. Bei der Parallelverlegung tritt jedesmal ein Kräftepaar auf. Dann kann man alle nach dem Schwerpunkte verlegten Kräfte zu einer Resultierenden und alle Kräftepaare zu einem resultierenden Kräftepaare vereinigen, wie dies in Band II näher besprochen ist. Die im Schwerpunkte angreifende Resultierende läßt sich hierauf in zwei Komponenten zerlegen, von denen eine in die Richtung der Stabachse und die andere in die Querschnittsebene fällt. Auch das resultierende Kräftepaar zerlegt man in zwei Kräftepaare, von denen die Ebene des einen durch die Stabachse geht, während die Ebene des anderen entweder mit der Querschnittsebene zusammenfällt oder, was auf dasselbe hinauskommt, parallel mit ihr ist. Im allgemeinsten Falle ist daher der Stab gleichzeitig auf Zug oder Druck, auf Schub, auf Biegung und auf Verwindung beansprucht.

In allen Fällen der zusammengesetzten Festigkeit berechnet man die zu jeder der einfachen Beanspruchungsarten für sich gehörigen Spannungen und nimmt an, daß sich alle ohne Störung übereinander lagern. Das setzt natürlich voraus, daß das Material dem Superpositionsgesetze gehorche. Trifft dies nicht zu, so verfährt man trotzdem gewöhnlich ebenso, muß aber dabei in Erinnerung behalten, daß die Lösung nur ungefähr richtig sein kann.

Ein Fall der zusammengesetzten Festigkeit liegt auch dann vor, wenn sich die äußeren Kräfte zu einem biegenden Kräftepaare und einer Scherkraft zusammensetzen lassen. Dieser

Fall kommt aber so häufig vor, daß er die Regel bildet und er wird daher als der allgemeine Fall der Biegung im Gegensatze zu dem vorher besprochenen Falle der reinen Biegung bezeichnet.

Ein Kräftepaar wird durch sein statisches Moment gemessen. Beansprucht das Kräftepaar den Stab auf Biegung, geht also seine Ebene durch die Stabachse, so wird sein statisches Moment als das Biegungsmoment bezeichnet. Wir gebrauchen dafür den Buchstaben M und rechnen es positiv, wenn es an dem linken Teile des in horizontaler Lage gezeichneten Stabes im Sinne des Uhrzeigers dreht. Die Scherkraft bezeichnen wir mit V und rechnen sie positiv, wenn sie am linken Teile des Stabes nach oben gerichtet ist.

§ 17. Willkürliche Annahmen von Bernoulli und Navier.

Die nächste Aufgabe, die uns gestellt ist, besteht darin, die Spannungen zu berechnen, die in den einzelnen Teilen des Querschnitts auftreten, wenn M und V gegeben sind. Wir wollen sie zuerst noch dadurch vereinfachen, daß wir den Fall der reinen Biegung voraussetzen, also $V = 0$ annehmen. Auf den allgemeineren Fall werden wir dann leicht dadurch gelangen, daß wir die durch V für sich bewirkten Spannungen hinzufügen. Der Fall der reinen Biegung (ohne Scherbeanspruchung) liegt z. B. im mittleren Teile einer Eisenbahnwagenachse vor oder auch bei der in Abb. 17 schematisch gezeichneten Belastung des Stabes.

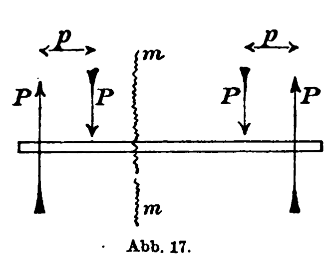


Abb. 17.

Für den Querschnitt mm, der irgendwo im mittleren Abschnitte des Stabes gezogen sein kann, bilden die äußeren Kräfte am linken Teile des Stabes ein Kräftepaar, dessen Moment $= Pp$ und das nach den vorausgehenden Vorzeichenbestimmungen positiv zu rechnen ist.

Die Aufgabe, die Spannungen zu berechnen, ist statisch

unbestimmt. Wenn wir auf die elastischen Formänderungen keine Rücksicht zu nehmen hätten, könnten wir jede beliebige Verteilung der Spannungen über den Stabquerschnitt als gleich gut möglich ansehen, wenn sie nur zu einem Kräftepaare vom Momente M führte.

Über die elastische Formänderung, die der Stab unter dem Einflusse der in Abb. 17 angegebenen Kräfte erfährt, läßt sich zunächst nur aussagen, daß sich die Angriffspunkte der Kräfte im Sinne dieser Kräfte relativ gegeneinander etwas verschieben müssen. Denkt man sich diese Angriffspunkte alle auf der Stabachse gelegen, so werden die Verbindungslinien der aufeinanderfolgenden Angriffspunkte nach der Formänderung einen Linienzug bilden, der nach oben hin hohl ist. Wegen der Stetigkeit des Zusammenhanges kann aber die Stabachse selbst an keiner Stelle einen Knick erfahren; die ursprünglich gerade Stabachse wird daher in eine flache Kurve übergehen. Diese Kurve heißt die elastische Linie des gebogenen Stabes.

Diese allgemeinen Bemerkungen sind noch zu unbestimmt, um ein Urteil über die Verteilung der Spannungen über den Querschnitt darauf gründen zu können. Um diese Unbestimmtheit zu heben, nimmt man an, daß jeder Querschnitt, der senkrecht zur Stabachse gezogen wurde, nach der Formänderung eben bleibt. Diese Annahme wird zunächst rein willkürlich eingeführt; sie ist zuerst von Bernoulli aufgestellt worden und dient seit den Arbeiten von Navier allgemein als Ausgangspunkt der Biegungslehre in der technischen Mechanik.

Gegen die Einführung einer solchen Annahme ohne jede weitere Begründung ist natürlich ein ernstes Mißtrauen am Platze. In der Tat wird man sich durchaus nicht befriedigt fühlen können, wenn diese Annahme, wie es oft genug geschieht, in der Form eines Axioms eingeführt wird. Besser ist es, sie als einen Satz hinzustellen, der seine Rechtfertigung dadurch findet, daß die aus ihm gezogenen Folgerungen im Einklange mit der Erfahrung sind.

In einem späteren Abschnitte werden wir sehen, daß man die Zulässigkeit der Bernoullischen Annahme auch noch einer strengeren Prüfung unterwerfen kann. Für Körper, die dem Hookeschen Gesetze gehorchen, werden wir sie bei jener Gelegenheit wenigstens für den Fall der reinen Biegung bestätigt finden. Für andere Körper kann indessen nur durch eine unmittelbare Beobachtung festgestellt werden, ob und bis zu welchem Grade der Genauigkeit sie in Wirklichkeit erfüllt ist.

Eine solche Prüfung habe ich auf folgende Weise vorgenommen. Ein Steinbalken von 20 × 30 cm Querschnitt wurde auf 150 cm Spannweite frei aufgelagert und in der Mitte belastet. Die Lastebene war parallel der größeren Querschnittsseite. Auf den Ansichtsflächen des Balkens ließ ich mehrere Reihen von kleinen Stiften einkitten, auf die man Spiegel aufschraubte. Wenn der Balken belastet wurde, drehten sich diese Spiegel zusammen mit dem Teile des Balkens, an dem sie befestigt waren. Die kleine Drehung der Spiegel wurde mit Hilfe eines Fernrohrs beobachtet. Dabei zeigte sich, daß alle Spiegel, die zu demselben Querschnitte gehörten, ziemlich genau dieselbe Drehung ausführten. Das ist aber in der Tat nur möglich, wenn der Querschnitt — mit dem gleichen Grade der Annäherung — eben bleibt. Zum mindesten ist zu schließen, daß die Umfangsseiten des Querschnittsumrisses geradlinig geblieben sind. Denn wenn sich eine dieser Seiten merklich krümmen sollte, müßten verschiedene Linienelemente der Seite verschiedene Winkel mit der Anfangslage bilden und die verschiedene Drehung hätte sich bei der Beobachtung der Spiegel verraten müssen.

Es kann daher als nachgewiesen gelten, daß auch selbst bei solchen Materialien, die dem Hookeschen Gesetze nicht gehorchen, die Bernoullische Annahme als hinreichend genau zutreffend angesehen werden kann. Unter „hinreichend“ genau ist hier ein solcher Grad der Annäherung zu verstehen, der die weiteren Schlüsse aus der Bernoullischen Annahme vor den gröbsten Fehlern schützt; namentlich ist die Krümmung

der Querschnitte im allgemeinen nicht erheblich gegenüber der Krümmung, die die Stabachse erfährt.

Für den Fall der reinen Biegung (Scherkraft $V = 0$) haben wir keine Veranlassung, ein Auftreten von Schubspannungen im Querschnitte zu vermuten. Zum mindesten müßten alle Schubspannungen unter sich im Gleichgewichte miteinander stehen. Wenn der Querschnitt in der Tat genau eben bleiben soll, können aber überhaupt keine Schubspannungen übertragen werden, denn diese hätten Winkeländerungen γ zur Folge, die an verschiedenen Stellen nicht nur von verschiedener Größe, sondern auch von entgegengesetztem Vorzeichen sein müßten. Es handelt sich dabei um die ursprünglich rechten Winkel zwischen der Querschnittsebene und den zur Stabachse parallel gezogenen Linien. Wenn sich diese an verschiedenen Stellen um verschiedene Beträge änderten, könnte der Querschnitt offenbar nicht eben bleiben.

Wir werden also festhalten, daß für den Fall $V = 0$ auch die Schubspannungen τ überall im Querschnitte gleich Null zu setzen sind. Daraus folgt dann sofort weiter, daß der Querschnitt nach der Formänderung senkrecht zur elastischen Linie steht.

Man betrachte jetzt ein Längenelement des Stabes, das zwischen zwei aufeinanderfolgenden Querschnitten liegt. Nach der Formänderung schneiden sich die beiden Querschnittsebenen in einer Geraden, die durch den Krümmungsmittelpunkt der elastischen Linie geht. Jedem Flächenelemente dF des Querschnitts entspricht ein Teil des Stabes, den wir als eine Faser bezeichnen wollen. Die zwischen den aufeinanderfolgenden Querschnitten liegenden Fasern waren ursprünglich gleich lang; nach der Formänderung sind aber die auf der Hohlseite der elastischen Linie liegenden kürzer als die auf der konvexen Seite — und zwar verhalten sich die Längen unmittelbar wie die Abstände der Fasern vom Krümmungsmittelpunkte der elastischen Linie. Den Längenänderungen, die diese Fasern erfuhren, entsprechen nach dem Elastizitätsgesetze die Normalspannungen σ, die in den Querschnittselementen übertragen werden.

Wir wissen schon, daß sich die Normalspannungen σ zu einem Kräftepaare vom Momente M zusammensetzen müssen. Daraus folgt, daß im Querschnitte sowohl Zug- als Druckspannungen übertragen werden. Die Fasern auf der konvexen Seite sind also jedenfalls länger geworden, als sie ursprünglich waren und die auf der Hohlseite haben sich verkürzt. Dazwischen liegt eine Faserschicht, die sich weder verkürzt noch verlängert hat. Die ihr im Querschnitte entsprechende Linie wird die neutrale Achse oder auch die Nulllinie des Querschnitts genannt.

Proportional mit dem Abstande von der neutralen Achse wachsen die elastischen Längenänderungen der Fasern. Wenn außer der Bernoullischen Annahme auch noch das Hookesche Gesetz gilt, müssen wir daher schließen, daß auch die Normalspannungen σ, die im Querschnitte übertragen werden, ihrem Abstande von der neutralen Achse proportional zu setzen sind. Diesen wichtigen Schluß hat zuerst Navier aus der Bernoullischen Annahme gezogen.

Diese ganze Betrachtung läßt sich auch noch durch eine andere ersetzen. Ohne uns auf die an sich willkürliche Bernoullische Annahme zu stützen, können wir davon ausgehen, daß im Querschnitte jedenfalls sowohl Zug- als Druckspannungen übertragen werden müssen. Die Normalspannung σ in irgend einem Punkte des Querschnitts kann dann als eine zunächst unbekannte Funktion der Koordinaten dieses Punktes in Bezug auf zwei im Querschnitte rechtwinklig zueinander gezogene Koordinatenachsen der y und z betrachtet werden. Wir setzen also

$$\sigma = f(yz).$$

Immer wenn man keinen bestimmten Anhaltspunkt für die Form einer solchen unbekannten Funktion hat, versucht man zunächst, mit den einfachsten Annahmen dafür auszukommen. Das σ nicht konstant sein kann, hat uns schon die oberflächlichste Betrachtung der elastischen Formänderung gelehrt. Die hiernach noch mögliche einfachste Annahme besteht darin, daß σ eine Funktion ersten Grades der Quer-

schnittskoordinaten y, z ist. Das ist aber gerade die von Navier vorausgesetzte oder aus der Bernoullischen Voraussetzung gefolgerte Spannungsverteilung.

Diese Art der Begründung unseres Ansatzes hat den Vorzug, daß sie nicht den Anschein erweckt, als ob es sich dabei um ein streng gültiges Naturgesetz handle; wir treten in die weitere Untersuchung sofort mit dem Bewußtsein ein, daß unsere Biegungstheorie nur angenäherte Gültigkeit hat und werden dadurch vor dem häufig vorkommenden Fehler bewahrt, alle Folgerungen, die daraus fließen, als buchstäblich genau anzusehen. Der fortwährende Vergleich unserer Rechnungen mit den Beobachtungstatsachen allein kann uns zeigen, wie weit wir diesen Rechnungen vertrauen dürfen.

Eine Funktion ersten Grades wird auch als eine lineare Funktion bezeichnet, weil sie durch das Bild einer geraden Linie — oder bei zwei unabhängigen Veränderlichen durch eine Ebene — zur Darstellung gebracht werden kann. Denken wir uns also in jedem Punkte des Querschnitts die dort auftretende Normalspannung σ durch eine in deren Richtung gezogene Strecke in einem beliebigen Maßstabe dargestellt, so liegen die Endpunkte aller dieser Strecken nach Navier auf einer Ebene, die die Querschnittsebene in der Nulllinie schneidet. In Anlehnung an jenen Sprachgebrauch bezeichnet man das Naviersche Spannungsverteilungsgesetz auch als das lineare oder als das Geradliniengesetz.

§ 18. Folgerungen aus dem Geradliniengesetze.

Wir denken uns die Koordinatenachsen der y und z im Querschnitte so gelegt, daß die Z-Achse mit der Nulllinie zusammenfällt. Dann ist σ überall unabhängig von z, und da es zu Null wird für $y = 0$, verschwindet auch das konstante Glied, das in der linearen Funktion im allgemeinen auftritt. Bezeichnen wir die Spannung in irgend einem bestimmten Punkte, der den Abstand y_0 von der Nulllinie hat, mit σ_0, so hat man für jeden anderen Punkt nach dem Geradliniengesetze

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = \frac{y}{y_0} \quad \text{oder} \quad \sigma = y \cdot \frac{\sigma_0}{y_0}. \tag{43}$$

Im Falle der reinen Biegung müssen die Normalspannungen ein Kräftepaar liefern; die Summe der Zugspannungen muß daher gleich der Summe der Druckspannungen sein. Dabei ist zu beachten, daß Gl. (43) die Spannung σ auch schon dem Vorzeichen nach richtig angibt, indem die nach verschiedenen Seiten der Nulllinie gerichteten Abstände y mit entgegengesetzten Vorzeichen zu rechnen sind. Wir können daher auch einfacher sagen, daß die algebraische Summe aller Normalspannungen für den ganzen Querschnitt gleich Null sein muß. In Form einer Gleichung heißt dies

$$\int \sigma \, dF = 0,$$

wenn die Summierung über den ganzen Querschnitt ausgeführt wird. Nach Einsetzen von σ aus Gl. (43) wird daraus

$$\int \frac{\sigma_0}{y_0} y \, dF = \frac{\sigma_0}{y_0} \int y \, dF = 0 \quad \text{oder} \quad \int y \, dF = 0. \tag{44}$$

Die Summe $\int y \, dF$ stellt aber das statische Moment der Querschnittsfläche in Bezug auf die Z-Achse dar, und die Bedingung, daß dieses Moment Null sein muß, lehrt uns, daß die mit der Z-Achse zusammenfallende Nulllinie durch den Schwerpunkt des Querschnitts geht.

Ferner muß das statische Moment des aus den Spannungen gebildeten Kräftepaares gleich dem Biegungsmomente M sein. Dabei genügt es indessen nicht, daß beide nur der Größe nach einander gleich sind; beide Kräftepaare müssen vielmehr auch in derselben Ebene liegen — und wir werden nachher sehen, daß diese letzte Bedingung ebenso wichtig ist, als die andere. Wenn der Querschnitt des Stabes, wie es sehr häufig bei den Anwendungen der Fall ist, symmetrisch gestaltet ist und alle äußeren Kräfte in der Symmetrieebene liegen, ist diese Bedingung freilich von selbst erfüllt, sobald man die Nulllinie, wie es wegen der Symmetrieeigenschaften nicht anders sein kann, senkrecht zur Symmetrieebene annimmt. Wir wollen hier zunächst den einfachsten Fall behandeln, nämlich den Fall,

daß die Nulllinie in der Tat senkrecht zur Ebene des Kräftepaares M steht. Dagegen wollen wir nicht gerade von vornherein annehmen, daß der Querschnitt symmetrisch gestaltet sei; vielmehr wollen wir ganz allgemein untersuchen, unter welchen Bedingungen jener einfachste Fall eintritt.

Die Momentengleichung für die Nulllinie (oder die Z-Achse) liefert

$$\int \sigma dF y = M$$

oder wenn man σ aus Gl. (43) einsetzt,

$$\frac{\sigma_0}{y_0}\int y^2 dF = M. \tag{45}$$

Die über den ganzen Querschnitt ausgedehnte Summengröße $\int y^2 dF$ ist nur noch von der Gestalt des Querschnitts abhängig und kann, wenn diese gegeben ist, entweder durch Ausführung der Integration oder, wenn diese zuviel Schwierigkeit machen sollte, durch eine mechanische Quadratur immer leicht berechnet werden. Sie wird das Trägheitsmoment des Querschnitts für die Z-Achse genannt. Bezeichnet man dieses mit Θ, so folgt aus Gl. (45)

$$\sigma_0 = \frac{M}{\Theta} y_0. \tag{46}$$

Damit ist die Aufgabe gelöst, für irgend einen vorher ins Auge gefaßten Punkt des Querschnitts mit dem Abstande y_0 von der Z-Achse die Spannung σ_0 zu berechnen. Mit Rücksicht auf Gl. (43) kann man auch die Zeiger 0 in Gl. (46) nachträglich noch streichen.

Gewöhnlich will man die größte Spannung σ berechnen, die überhaupt im Querschnitte auftritt. Man hat dann unter y_0 in Gl. (46) den größten Abstand von der Nulllinie zu verstehen, der im Querschnitte vorkommt. In diesem Falle kann man die beiden nur von der Querschnittsgestalt abhängigen Größen in Gl. (46) zu einer einzigen zusammenfassen, indem man setzt

$$\frac{\Theta}{y_0} = W. \tag{47}$$

Die Größe W wird das Widerstandsmoment des Quer-

schnitts genannt. Hiermit geht Gl. (46) über in

$$\sigma = \frac{M}{W}, \tag{48}$$

wobei der Zeiger der Einfachheit wegen weggelassen ist, obschon man sich wohl zu erinnern hat, daß diese Spannung σ nur an der äußersten Kante auftritt. Aus der Bedeutung von Θ folgt, daß es eine Größe von der Dimension cm^4 ist, d. h. daß es die vierte Potenz einer Länge darstellt. Die Dimension von W ist cm^3. In den von den Hüttenwerken herausgegebenen Verzeichnissen der von ihnen gewalzten Eisenträger ist zur Bequemlichkeit des Benutzers für jedes Profil sowohl Θ als W angegeben. Gewöhnlich beziehen sich diese Angaben auf 1 mm als Längeneinheit; will man in cm rechnen, wie es hier immer geschieht, so muß man demnach bei Θ vier und bei W drei Stellen abschneiden.

Um uns zu überzeugen, daß Gl. (46) den Dimensionen nach richtig ist, setzen wir die Benennungen der auf der rechten Seite vorkommenden Größen ein, indem wir die zugehörigen Zahlenwerte unbeachtet lassen. Wir erhalten dann, da M in cm kg anzugeben ist,

$$\frac{\mathrm{cm\,kg}}{\mathrm{cm}^4} \cdot \mathrm{cm} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{cm}^2},$$

und dies ist in der Tat die Dimension einer bezogenen Spannung.

Die vorausgehenden Gleichungen gelten aber nur unter der Voraussetzung, von der aus sie abgeleitet sind, daß nämlich die Nulllinie senkrecht zur Ebene des Biegungsmoments M steht. Ob und unter welchen Umständen diese Voraussetzung zutrifft, lehrt uns eine zweite Momentengleichung, die ausspricht, daß die Ebene des aus den Spannungen σ zusammengesetzten Kräftepaares mit der Ebene des Biegungsmoments zusammenfällt. Dazu bilden wir die statischen Momente in Bezug auf die Y-Achse des Querschnitts. Diese Achse sei in der Ebene des Biegungsmoments angenommen, also durch den Querschnittsschwerpunkt senkrecht zur Nulllinie gezogen, und das statische Moment der äußeren Kräfte ist daher für sie gleich Null. Dasselbe muß also auch von dem statischen

Momente der Spannungen zutreffen. Wir haben also

$$\int \sigma dFz = 0 \quad \text{oder} \quad \int zydF = 0, \tag{49}$$

wobei die letzte Form der Gleichung wieder durch Einsetzen von σ aus Gl. (43) aus der vorhergehenden gefunden wird.

Auch die Summengröße $\int yzdF$ hängt nur von der Gestalt des Querschnitts und von der Richtung der Schwerpunktsachse ab, die mit der Nulllinie zusammenfällt. Alle Summengrößen, die über den Querschnitt zu erstrecken sind und die Produkte aus den Flächenelementen und den Querschnittskoordinaten enthalten, bezeichnet man als Momente und bemißt deren Grad nach der Zahl der Querschnittskoordinaten, die als Faktoren in jenen Produkten auftreten. Wie das Trägheitsmoment ist daher auch $\int yzdF$ als ein Moment zweiten Grades des Querschnitts zu bezeichnen. Man hat ihm noch die besonderen Namen „Zentrifugalmoment" oder auch „Deviationsmoment" gegeben. Es soll mit Φ bezeichnet werden, wobei die besonderen Achsenrichtungen durch angehängte Zeiger kenntlich gemacht werden können. Gl. (49) kann hiernach auch in der Form

$$\Phi_{yz} = 0 \tag{50}$$

ausgesprochen werden. Damit ist die gesuchte Bedingung gefunden; nur dann, wenn das Zentrifugalmoment des Querschnitts für ein durch den Schwerpunkt gelegtes rechtwinkliges Achsenkreuz, von dem eine Achse in die Ebene des Moments der äußeren Kräfte fällt, gleich Null ist, können die Spannungen nach den einfachen Formeln (46) oder (48) berechnet werden.

Ein Trägheitsmoment kann nie zu Null werden, da es sich aus lauter positiven Gliedern zusammensetzt. Dagegen tragen alle Flächenteile des Querschnitts, die im ersten und dritten Quadranten des Achsenkreuzes liegen, positive, alle im zweiten und vierten Quadranten negative Glieder zum Zentrifugalmomente bei. Das Zentrifugalmoment kann daher ebensowohl negativ als positiv oder gleich Null werden. Der letzte Fall wird, wie man ohne weiteres einsieht, immer bei sym-

metrischen Querschnitten eintreten, wenn eine Achse des Achsenkreuzes mit der Symmetrieachse zusammenfällt, denn die Beiträge von je zwei spiegelbildlich zueinander liegenden Flächenteilen heben sich gegeneinander gerade auf.

Ehe wir die Berechnung der Spannungen auf den Fall ausdehnen, daß Φ_{yz} nicht gleich Null ist, müssen wir einige geometrische Betrachtungen über die Momente zweiten Grades einschalten.

§ 19. Trägheits- und Zentrifugalmomente von Querschnittsflächen.

Wir wollen uns zunächst die Aufgabe stellen, die Trägheitsmomente eines Querschnitts für alle Achsen, die man in der Querschnittsebene ziehen kann, untereinander zu vergleichen.

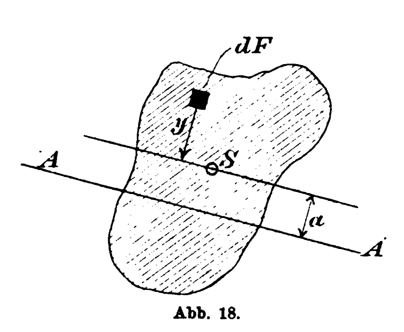


Abb. 18.

In Abb. 18 gebe die schraffierte Fläche eine Querschnittsfläche von beliebiger Gestalt an; AA sei die Achse, für die man das Trägheitsmoment berechnen soll und S sei der Schwerpunkt der Fläche. Man ziehe durch S eine zweite Achse, die zu AA parallel ist. Das Trägheitsmoment für diese Schwerpunktsachse sei einfach mit Θ, das für die Achse AA, die den Abstand a von S hat, mit Θ_a bezeichnet. Der Abstand eines Flächenelementes dF von der Schwerpunktsachse sei gleich y, das positiv oder negativ gerechnet werden soll, je nachdem es in entgegengesetzter oder in gleicher Richtung mit a liegt. Dann hat man:

$$\Theta_a = \int (y + a)^2 dF = \int y^2 dF + 2a \int y dF + a^2 \int dF.$$

Das erste Glied gibt das Trägheitsmoment Θ für die Schwerpunktsachse an. Das zweite Glied ist gleich Null, denn $\int y dF$ ist das statische Moment der Querschnittsfläche für eine

durch den Schwerpunkt gehende Achse und dieses verschwindet für alle Schwerlinien. Im dritten Gliede kann man $\int dF$ zur ganzen Querschnittsfläche F zusammenfassen. Die vorige Gleichung vereinfacht sich daher zu

$$\Theta_a = \Theta + a^2 \cdot F. \tag{51}$$

Man kann hiernach auf sehr einfache Weise für alle übrigen Achsen die Trägheitsmomente angeben, sobald man sie für alle Schwerpunktsachsen kennt. Dieser Satz wird häufig gebraucht, um das Trägheitsmoment eines Querschnitts zu berechnen, der sich aus verschiedenen Flächen von einfacher Gestalt, z. B. aus lauter Rechtecken, wie der I-förmige Querschnitt zusammensetzt, wovon bei den Aufgaben noch weiter die Rede sein wird.

Es handelt sich jetzt nur noch darum, die Trägheitsmomente für die in verschiedenen Richtungen durch den Schwerpunkt gezogenen Achsen miteinander zu vergleichen. Wir legen in Abb. 19 durch den Schwerpunkt in beliebiger Richtung ein rechtwinkliges Achsenkreuz der YZ und ziehen noch eine dritte Schwerlinie AA, die mit der Y-Richtung den beliebigen Winkel α bildet. Die Koordinaten eines Flächenelementes dF seien y, z, der Abstand zwischen dF und AA mit v und der Abschnitt, den v auf AA von S an gerechnet bildet, mit u bezeichnet. Dann ist

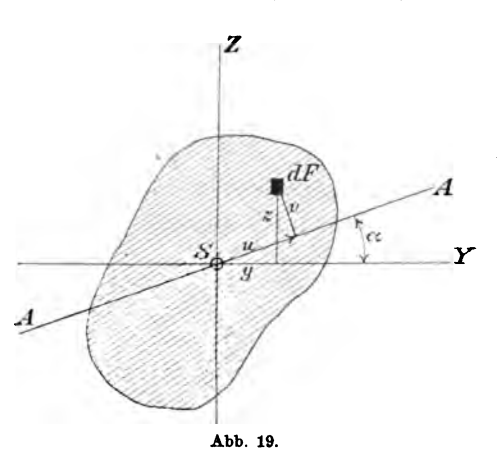


Abb. 19.

$$u = y \cos \alpha + z \sin \alpha,$$
$$v = - y \sin \alpha + z \cos \alpha.$$

Für das Trägheitsmoment Θ_a in Bezug auf die Achse AA erhalten wir

$$\Theta_a = \int v^2 dF = \int (z \cos \alpha - y \sin \alpha)^2 dF.$$

Beim Ausquadrieren geht dies über in

$$\Theta_a = \cos^2\alpha \int z^2 dF + \sin^2\alpha \int y^2 dF - 2 \sin \alpha \cos \alpha \int yz dF.$$

Die hier noch vorkommenden Summengrößen bilden aber die Momente zweiten Grades für die Koordinatenachsen der y und z. Versteht man unter Θ_y das Trägheitsmoment in Bezug auf die Y-Achse, also

$$\Theta_y = \int z^2 dF$$

und entsprechend bei den anderen Momenten, so hat man auch

$$\Theta_\alpha = \cos^2\alpha\,\Theta_y + \sin^2\alpha\,\Theta_z - \sin 2\alpha\,\Phi_{yz}. \tag{52}$$

Wir bilden sofort auch das Zentrifugalmoment Φ_a für die Achse AA und eine zu ihr senkrecht gezogene. Nach der Definition des Zentrifugalmoments ist

$$\Phi_\alpha = \int uv dF = \int (y \cos \alpha + z \sin \alpha)(- y \sin \alpha + z \cos \alpha) dF.$$

Nach Ausmultiplizieren und Einsetzen der Werte für die dabei auftretenden Summengrößen geht dies über in

$$\Phi_\alpha = \frac{\Theta_y - \Theta_z}{2} \sin 2\alpha + \Phi_{yz} \cos 2\alpha. \tag{53}$$

Mit Hilfe der Gleichungen (52) und (53) vermögen wir die Momente zweiten Grades für alle anderen Schwerpunktsachsen anzugeben, wenn sie für irgend zwei zueinander senkrechte Achsen bereits bekannt sind. Wir wollen jetzt untersuchen, für welche Richtungen der Schwerpunktsachse das Trägheitsmoment zu einem Maximum oder Minimum wird. Dazu differentiieren wir Θ_α nach α und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{d\Theta_\alpha}{d\alpha} &= -2 \cos \alpha \sin \alpha\,\Theta_y + 2 \sin \alpha \cos \alpha\,\Theta_z - 2 \cos 2\alpha\,\Phi_{yz} \\ &= (\Theta_z - \Theta_y) \sin 2\alpha - 2 \cos 2\alpha\,\Phi_{yz} \\ &= -2\Phi_\alpha. \end{aligned}$$

Für ein Maximum oder Minimum von Θ_α muß der Differentialquotient verschwinden und wir sehen, daß dies bei jenen Achsen zutrifft, für die das Zentrifugalmoment verschwindet. Durch Auflösen der Gleichung $\Phi_\alpha = 0$ erhalten wir für diese ausgezeichneten Richtungen

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\,\Phi_{yz}}{\Theta_z - \Theta_y}. \tag{54}$$

Welchen Wert auch der Bruch auf der rechten Seite haben möge, man kann immer zwei zwischen 0 und 2π liegende Winkel, die sich um zwei Rechte voneinander unterscheiden, angeben, deren Tangente gleich diesem Werte ist. Es gibt also auch immer zwei zwischen 0 und π liegende Winkel α, von denen der eine um einen Rechten größer ist, als der andere, für die das Zentrifugalmoment zu Null wird und Θ einen größten oder kleinsten Wert annimmt. Ob der eine oder der andere Fall vorliegt, vermag man leicht mit Hilfe des zweiten Differentialquotienten zu entscheiden. Es genügt aber auch, darauf aufmerksam zu machen, daß sich Θ stetig ändert, wenn man die Achse AA eine Umdrehung ausführen läßt, und daß daher von den beiden ausgezeichneten Werten notwendig der eine ein Maximum, der andere ein Minimum sein muß. Die beiden zueinander senkrechten Richtungen, die durch Gl. (54) bestimmt sind, werden die Hauptachsen des Querschnitts genannt.

Jeder beliebig gestaltete Querschnitt hat also immer mindestens zwei durch den Schwerpunkt gehende Hauptachsen. War zufällig $\Phi_{yz} = 0$, so sind die Koordinatenachsen nach Gl. (54) selbst die Hauptachsen. Es kann aber auch vorkommen, daß jede Schwerpunktsachse des Querschnitts zugleich eine Hauptachse ist, nämlich dann, wenn $\Phi_{yz} = 0$ und zugleich $\Theta_z = \Theta_y$ ist. Der Bruch auf der rechten Seite von Gl. (54) nimmt dann die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an; wir erkennen aber aus Gl. (53), daß in diesem Falle Φ_α für jede Achse AA zu Null wird, und aus Gl. (52) folgt, daß dann alle Trägheitsmomente Θ_α untereinander gleich sind. Dieser Fall liegt z. B.

bei einem Quadrate oder überhaupt bei jedem regelmäßigen Vielecke vor.

Um die Zentrifugalmomente brauchen wir uns in der Folge nicht weiter zu kümmern. Dagegen wollen wir noch eine geometrische Darstellung ableiten, mit deren Hilfe man die in den vorausgehenden Formeln ausgesprochenen Gesetzmäßigkeiten leicht zu überblicken vermag. Zu diesem Zwecke können wir uns die Koordinatenachsen der y und z von vornherein in die Richtungen der Hauptachsen gelegt denken. Gl. (52) vereinfacht sich unter dieser Voraussetzung zu

$$\Theta_\alpha = \cos^2\alpha\,\Theta_y + \sin^2\alpha\,\Theta_z. \tag{55}$$

An Stelle der Trägheitsmomente selbst wollen wir in diese Gleichung die Trägheitsradien einführen. Dividiert man nämlich jedes Trägheitsmoment durch die Fläche des Querschnitts, so erhält man eine Größe, die das Quadrat einer Länge darstellt. Setzt man also

$$i_\alpha^2 = \frac{\Theta_\alpha}{F}, \tag{56}$$

so bedeutet i_α den quadratischen Mittelwert der Abstände aller Flächenelemente des Querschnitts von der Achse. Dieser Mittelwert wird als Trägheitshalbmesser bezeichnet; man rechnet, da er eine Strecke bildet, mit ihm oft viel bequemer als mit dem Trägheitsmomente selbst. Durch Division mit F geht Gl. (55) über in

$$i_\alpha^2 = \cos^2\alpha\, i_y^2 + \sin^2\alpha\, i_z^2. \tag{57}$$

Um i_α als Funktion des Richtungswinkels α geometrisch darzustellen, würde es am nächsten liegen, die Größe von i_α auf jeder Schwerpunktachse abzutragen und alle Endpunkte durch eine Kurve zu verbinden. Wenn auch gegen diese Darstellung nichts einzuwenden ist, so wäre sie doch nicht bequem, da die erhaltene Kurve vom vierten Grade wäre und über deren Eigenschaften nichts als bekannt vorausgesetzt werden könnte. Man muß bei solchen Darstellungen immer suchen, mit wohlbekannten Kurven, also namentlich mit Kurven zweiten Grades auszukommen. Dies ist hier auch leicht möglich, wenn

man auf jeder Schwerpunktsachse nicht i_α selbst, sondern eine Strecke abträgt, die ihr umgekehrt proportional ist. Zu diesem Zwecke wähle man eine beliebige Strecke m und bilde zu jedem Trägheitshalbmesser i den Wert

$$\tau = \frac{m^2}{i}. \qquad (58)$$

Setzt man den Wert von i aus dieser Gleichung in Gl. (57) ein, so geht sie nach einer einfachen Umformung über in

$$1 = \left(\frac{\tau_\alpha \cos\alpha}{\tau_y}\right)^2 + \left(\frac{\tau_\alpha \sin\alpha}{\tau_z}\right)^2 \qquad (59)$$

und dies ist, wenn τ_α als Radiusvektor auf jedem Strahle α abgetragen wird, die Mittelpunktsgleichung einer Ellipse, auf

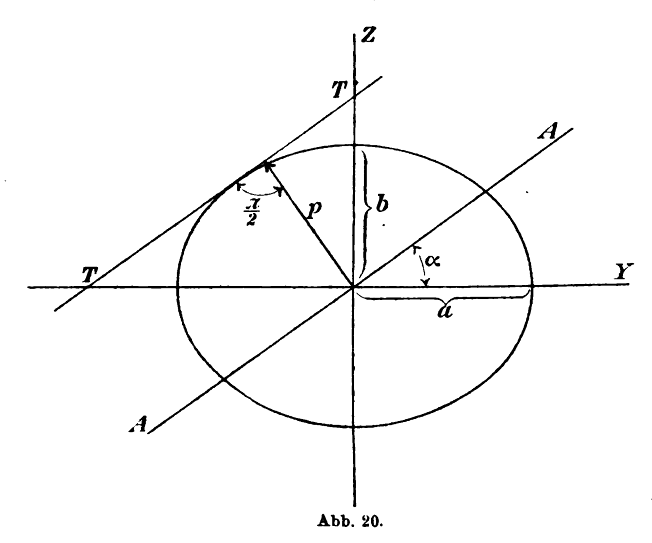


Abb. 20.

der die Endpunkte der Radienvektoren enthalten sind. Der Maßstab, in dem die Ellipse gezeichnet ist, hängt von der Wahl des beliebigen Faktors m in Gl. (58) ab.

Noch etwas übersichtlicher wird die Darstellung, wenn man sich einer bekannten Eigenschaft der Ellipse erinnert. Zieht man nämlich in Abb. 20 zu dem Durchmesser AA einer

Ellipse eine parallele Tangente TT, so ist das Perpendikel p vom Mittelpunkte auf die Tangente durch die Gleichung

$$p^2 = a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha \tag{60}$$

gegeben und aus dem Vergleiche mit Gl. (57) folgt, daß p den zu AA gehörigen Trägheitshalbmesser angibt, wenn man die Halbachsen $a = i_z$ und $b = i_y$ macht. Die auf diese Art erhaltene Ellipse ist übrigens unter jenen enthalten, die bei der vorigen Darstellung gefunden wurden. Es ist nämlich jene, für die

$$m^2 = i_y i_z$$

gewählt wird, denn beide stimmen sowohl in den Richtungen als in den Größen der Hauptachsen miteinander überein. Es ist zweckmäßig, auch wenn man an der ersten Darstellung festhalten will, m stets in dieser Größe zu wählen. Die so bestimmte Ellipse heißt allgemein die Trägheitsellipse. Man kann nämlich die ganze vorausgehende Betrachtung mit geringer Änderung auch für alle Strahlen durchführen, die nicht durch den Schwerpunkt, sondern durch einen anderen beliebig gewählten Punkt des Querschnitts gezogen sind; ich habe hier davon abgesehen, da ich nicht unnötiger Weise umständlicher in der Darstellung werden wollte, als es durch den Zweck geboten ist. Für die durch den Schwerpunkt gehenden Achsen führt die Trägheitsellipse den besonderen Namen Zentralellipse.

Man kann übrigens, auch ohne von dem in Gl. (60) ausgesprochenen Satze Gebrauch zu machen, die zweite Darstellung aus der ersten ableiten. Zu diesem Zwecke betrachte man die Zentralellipse, die zunächst dadurch definiert sei, daß auf jedem Strahle die Strecke τ nach Gl. (58) (mit $m^2 = i_y i_z$) abgetragen ist, als Projektion eines Kreises. Um diesen Kreis denke man sich eine Anzahl von Quadraten umschrieben, die man mit projiziert. Alle diese Quadrate und daher auch alle ihre Projektionen haben gleichen Flächeninhalt. Daraus folgt sofort, wenn p wieder das vorher damit bezeichnete Perpendikel bedeutet, daß $p\tau$ konstant und zwar gleich $\tau_y \tau_z$ sein muß, also

$$p\tau = p\frac{m^2}{i} = \frac{m^4}{i_y i_z} = m^2$$

und hiermit $p = i$.

Wenn die Zentralellipse gegeben ist, findet man den zu irgend einer Achse gehörigen Trägheitshalbmesser immer am einfachsten, indem man eine parallele Tangente an die Ellipse zieht und deren Abstand vom Mittelpunkte mit dem Zirkel abmißt. Man hat dann keine Umrechnung nötig, wie sie nach Gl. (58) erforderlich wird, wenn man von dem Radiusvektor r ausgeht, der von der Zentralellipse auf dem Strahle abgeschnitten wird.

Die Aufgabe, das Trägheitsmoment für irgend eine in der Querschnittsebene enthaltene Achse möglichst schnell anzugeben, ist durch die vorausgehenden Betrachtungen als gelöst anzusehen, sobald die Zentralellipse bekannt ist. Es bleibt noch übig zu zeigen, wie man diese selbst erhält. Hat der Querschnitt eine Symmetrieachse, so kennt man sofort die Richtungen der Hauptachsen und man braucht nur die Trägheitsmomente durch unmittelbare Ausführung der Summierung aufzusuchen, um die Hauptträgheitsradien und damit die Hauptachsen der Zentralellipse zu erhalten. Im anderen Falle zieht man drei Schwerpunktachsen in beliebigen Richtungen, berechnet für diese unmittelbar die Trägheitsmomente, findet daraus die Trägheitsradien und zieht dann zu beiden Seiten jeder Achse eine Parallele, deren Abstand gleich dem Trägheitsradius gemacht wird. Man hat damit sechs Tangenten der Zentralellipse gefunden. Nach dem Satze von Brianchon kann man dann noch beliebig viele andere Tangenten in einfachster Weise konstruieren. Die Ellipse selbst wird damit ebenfalls als die von diesen Tangenten umhüllte Kurve bekannt. Darin besteht eben der Vorteil, den die Darstellung mit Hilfe einer Kurve zweiten Grades gewährt, daß man bei allen weiteren Konstruktionen unmittelbar an bekannte Eigenschaften und bekannte Sätze anknüpfen kann. — Natürlich kann man anstatt dieses Verfahrens auch das Zentrifugalmoment neben den beiden Trägheitsmomenten für zwei zueinander rechtwinklige Achsen berechnen und die Lage der Hauptachsen nach Gl. (54) bestimmen.

Für die in der Technik viel gebrauchten Walzeisenprofile

sind die Richtungen der Hauptachsen und die zugehörigen Trägheitshalbmesser oder Trägheitsmomente ein für alle Male vorausberechnet, und in den in allen Zeichenstuben zu findenden Verzeichnissen angegeben, so daß man in der Mehrzahl aller Fälle die Zentralellipse auf Grund dieser Angaben ohne weiteres auftragen kann.

Ich habe bisher immer nur von den Trägheitsmomenten für solche Achsen gesprochen, die in der Querschnittsebene selbst enthalten sind. Man kann diese Untersuchung leicht auch auf solche Fälle ausdehnen, bei denen die Achse einen beliebigen Winkel mit der Querschnittsebene bildet (oder ihr parallel ist). In der Festigkeitslehre kommt indessen nur noch einer von diesen Fällen in Frage, nämlich das Trägheitsmoment für eine zur Querschnittsebene senkrechte Achse. Dieses wird als das polare Trägheitsmoment bezeichnet. Gebraucht man dafür den Buchstaben Θ_p, so ist es definiert durch den Ansatz

$$\Theta_p = \int r^2 dF,$$

wenn r der senkrechte Abstand zwischen dF und der Achse ist. Zieht man durch den Schnittpunkt der Achse mit der Querschnittsebene wieder zwei Koordinatenachsen, so hat man

$$r^2 = y^2 + z^2$$

und daher

$$\Theta_p = \Theta_y + \Theta_z. \qquad (61)$$

Θ_p ist also mit gegeben, wenn man die Zentralellipse kennt. Bezeichnet man speziell die Hauptträgheitsmomente mit Θ_1 und Θ_2 und beachtet, daß die Koordinatenachsen jetzt in beliebiger Richtung gezogen sein durften, so erhält man aus Gl. (61) noch die einfache Beziehung

$$\Theta_y + \Theta_z = \Theta_1 + \Theta_2,$$

d. h. die Summe der Trägheitsmomente für irgend zwei aufeinander rechtwinklige Achsen, die in der Querschnittsfläche durch einen gegebenen Punkt gezogen sind, ist konstant.

§ 20. Berechnung der Spannungsverteilung bei schiefer Belastung.

Schief nennt man die Belastung eines auf Biegung beanspruchten Stabes, wenn die Ebene der äußeren Kräfte oder die Ebene des Biegungsmomentes nicht durch eine Hauptachse des Querschnitts geht. In diesem Falle zerlegt man jede Kraft in zwei Komponenten parallel zu den beiden Querschnittshauptachsen und setzt die Komponenten von jeder Richtung zu einem Biegungsmomente zusammen, dessen Ebene dann ebenfalls durch eine Hauptachse geht. Man kann auch, wenn die gegebenen Kräfte schon vorher zu einem Biegungsmomente vereinigt waren, dessen Ebene nicht durch die Hauptachse ging, dieses nachträglich in zwei durch die Hauptachsen gehende Kräftepaare zerlegen. Wird der Winkel, den in diesem Falle die Ebene des Biegungsmomentes M mit einer der Hauptachsen bildet, mit α bezeichnet, so sind die Momente der beiden Komponenten gleich $M \cos \alpha$ und gleich $M \sin \alpha$. Dann berechnet man die Spannungen, die durch jede Komponente für sich genommen im Querschnitte hervorgerufen werden, nach Gl. (46) oder Gl. (48), die hier anwendbar sind. Die durch das Zusammenwirken beider Komponenten entstehenden Spannungen findet man daraus durch algebraische Summierung der beiden Werte. Im ganzen hat man daher

$$\sigma = \frac{M \cos \alpha}{\Theta_z} \cdot y + \frac{M \sin \alpha}{\Theta_y} \cdot z. \tag{62}$$

Eine einfache Betrachtung läßt nachträglich erkennen, an welcher Stelle des Querschnitts σ seinen größten Wert annimmt.

Zur Begründung dieses Verfahrens kann man sich entweder auf das Gesetz der Superposition verschiedener Spannungszustände berufen oder man kann auch darauf hinweisen, daß die durch Gl. (62) angegebene Spannungsverteilung linear ist und dabei das Gleichgewicht zwischen den äußeren und inneren Kräften herstellt. Bei linearer Spannungsverteilung

ist ein solches Gleichgewicht nur auf eine einzige Art möglich, denn die Richtung der Nulllinie bestimmt eindeutig die Ebene des aus den Spannungen resultierenden Kräftepaares und die Größe der Spannung in einem gegebenen Abstande von der Nullinie bestimmt ebenfalls eindeutig die Größe des statischen Moments dieses Kräftepaares. — Wenn das Gesetz der Superposition für den betreffenden Stoff nicht gültig ist, verliert die zuerst gegebene Begründung ihre Bedeutung. In diesem Falle ist aber auch kaum anzunehmen, daß die Spannungsverteilung linear ist und die andere Begründung versagt daher ebenfalls. In der Tat darf man in diesem Falle nicht darauf rechnen, daß Gl. (62) ziemlich genau richtig ist; ihre Anwendung kann vielmehr zu erheblichen Abweichungen von der Wirklichkeit führen. Indessen gilt dies, wie schon öfters bemerkt, bei allen Festigkeitsberechnungen, die sich auf solche Stoffe beziehen.

Ein einfaches Beispiel möge noch die Anwendung von Gl. (62) zeigen. Ein Holzbalken sei als Dachpfette verwendet, so daß eine Querschnittsseite in die Neigung der Dachfläche fällt. Der Querschnitt des Balkens ist in Abb. 21 gezeichnet. Nimmt man an, daß die Belastung Q des ganzen Balkens (samt Eigengewicht) gleichmäßig über die ganze Spannweite l verteilt ist, so hat man zunächst für das Biegungsmoment in der Mitte, wie man leicht findet,

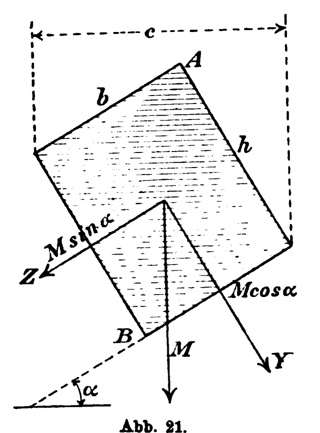


Abb. 21.

$$M = \frac{Ql}{8}.$$

Die Ebene von M steht lotrecht und bildet daher Winkel von α und $\frac{\pi}{2} - \alpha$ mit den Hauptachsen. Die Komponenten von M in den durch die Hauptachsen gelegten Ebenen sind in die Abbildung eingeschrieben.

Das Trägheitsmoment Θ_z eines Rechtecks folgt aus

$$\Theta_z = \int y^2 dF = b \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2 dy = \frac{bh^3}{12}$$

und das Widerstandsmoment W_z daher

$$W_z = \frac{bh^2}{6}.$$

Die Momente für die andere Hauptachse findet man daraus durch Vertauschung von b mit h. — Durch das Achsenkreuz der Y und Z wird das Rechteck in vier Quadranten zerlegt, von denen zwei durch die Komponenten $M \sin \alpha$ und $M \cos \alpha$ Spannungen entgegengesetzten Vorzeichens erfahren, während sich bei den beiden anderen die Spannungen addieren. Man erkennt daraus, daß an der Ecke A die größte Druck- und bei B die größte Zugspannung auftritt und daß beide von einerlei Größe sind. Diese größte Spannung folgt daher aus

$$\sigma = \frac{M \cos \alpha}{W_z} + \frac{M \sin \alpha}{W_y} = \frac{6\,M \cos \alpha}{bh^2} + \frac{6\,M \sin \alpha}{b^2 h}.$$

Die in Abb. 21 mit c bezeichnete Breite der Horizontalprojektion des Balkens ist

$$c = b \cos \alpha + h \sin \alpha$$

und man kann daher für den vorausgehenden Ausdruck auch einfacher

$$\sigma = \frac{6\,Mc}{b^2 h^2} \tag{63}$$

schreiben, was für die Ausführung der Berechnung am bequemsten ist. Für M hat man entweder den vorher angegebenen Wert einzusetzen, oder wenn die Belastung nicht gleichförmig verteilt sein sollte, das anderweitig in der Kraftebene berechnete Biegungsmoment. Mit $c = b$ geht der Fall in den einfacheren über, daß die zu h parallele Symmetrieachse in die lotrechte Kraftebene fällt.

§ 21. Exzentrische Zug- oder Druckbelastung eines Stabes.

Wir nehmen jetzt an, daß die äußeren Kräfte am einen Teile des Stabes sich auf eine einzige Kraft zurückführen lassen, die senkrecht zum Querschnitte steht, dabei aber nicht durch den Schwerpunkt geht. Dieser Belastungsfall führt die in der Überschrift angegebene Bezeichnung. Offenbar handelt es sich hierbei um einen Fall der zusammengesetzten Festigkeit, nämlich um das Zusammenwirken einer achsialen Belastung mit einer reinen Biegungsbelastung. Denn nach den früher gegebenen Vorschriften ist die äußere Kraft zu ersetzen durch eine ihr gleiche und parallele, die im Schwerpunkte angreift und durch das bei dieser Parallelverlegung auftretende Kräftepaar, dessen Ebene durch die Stabmittellinie geht. Dieses Kräftepaar zerlegen wir noch, wie im vorigen Paragraphen, in zwei Komponenten nach den Richtungen der Hauptachsen.

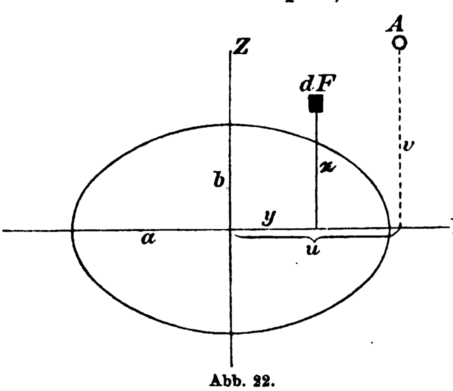


Abb. 22.

In Abb. 22 ist von dem Querschnitte nur die Zentralellipse gezeichnet; man kann sich den Querschnittsumriß beliebig hinzudenken. A sei der Angriffspunkt der äußeren Kraft P mit den Koordinaten u und v in Bezug auf die Hauptachsen. Dann ist noch irgend ein Flächenelement dF des Querschnitts mit den Koordinaten y und z angegeben. Die Spannung σ am Orte yz setzt sich aus drei Gliedern zusammen, nämlich

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{Pv}{\Theta_y} z + \frac{Pu}{\Theta_z} \cdot y.$$

Das erste Glied rührt von der achsialen Belastung her; im zweiten Gliede ist Pv das Moment des Kräftepaares, dessen Ebene parallel zur Hauptachse Z ist, und ähnlich im dritten Gliede. Durch Einführung der Trägheitshalbmesser, die gleich

den Halbachsen a und b der Zentralellipse sind, an Stelle der Trägheitsmomente geht die vorige Gleichung über in

$$\sigma = \frac{P}{F}\left(1 + \frac{vz}{b^2} + \frac{uy}{a^2}\right). \tag{64}$$

In der neutralen Achse des Querschnitts muß dieser Ausdruck verschwinden, wir erhalten daher als Gleichung der Nulllinie

$$\frac{uy}{a^2} + \frac{vz}{b^2} = -1. \tag{65}$$

Darin sind y und z die Koordinaten von Punkten der Nulllinie, die selbstverständlich — nämlich weil dies schon bei der Aufstellung der Ausdrücke für die Spannungen vorausgesetzt wurde — eine gerade Linie ist. Die Koeffizienten von y und z in Gl. (65) hängen von den Koordinaten u und v, also von der Lage des Angriffspunktes der exzentrischen Belastung ab. Jedem Punkte A ist durch Gl. (65) eine bestimmte Nulllinie zugeordnet. Wir wollen uns jetzt die Aufgabe stellen, diesen Zusammenhang näher zu ergründen.

Zu diesem Zwecke sei zunächst angenommen, der Angriffspunkt A liege auf der Zentralellipse. Die Koordinaten irgend eines Punktes dieser Ellipse seien mit η, ζ bezeichnet. Dann hat man die Ellipsengleichung

$$\frac{\eta^2}{a^2} + \frac{\zeta^2}{b^2} = 1. \tag{66}$$

Setzt man nun $u = \eta$ und $v = \zeta$, so wird Gl. (65) befriedigt, wenn wir $y = -\eta$ und $z = -\zeta$ annehmen, denn diese Gleichung geht dann in Gl. (66) über. Wir erkennen daraus zunächst, daß die Nulllinie durch den dem Angriffspunkte diametral gegenüberliegenden Punkt der Zentralellipse geht, falls der Angriffspunkt selbst auf der Zentralellipse liegt. Weiter folgt aber noch, daß die Nulllinie in diesem Falle die Zentralellipse berührt. Um dies zu beweisen, differentiieren wir die Gleichungen beider Linien. Wir finden

$$\frac{u}{a^2} + \frac{v}{b^2}\frac{dz}{dy} = 0,$$

$$\frac{\eta}{a^2} + \frac{\zeta}{b^2}\frac{d\zeta}{d\eta} = 0,$$

und wenn wir in die erste Gleichung die vorher angenommenen Werte von u und v einsetzen und die zweite Gleichung auf den auf der Zentralellipse liegenden Punkt der Nulllinie anwenden, finden wir in der Tat, daß an dieser Stelle

$$\frac{dz}{dy} = \frac{d\zeta}{d\eta}$$

ist, daß also die Nulllinie und die Zentralellipse an dieser Stelle gleich gerichtet sind. Damit ist die Lage der Nulllinie vollständig bestimmt, für den Fall, daß der Angriffspunkt der Belastung auf der Zentralellipse enthalten ist.

Wir denken uns jetzt den Angriffspunkt aus seiner ersten Lage längs des durch den Schwerpunkt gezogenen Strahles verschoben. Dann ändern sich u und v beide in demselben Verhältnisse. Auf den Wert des Differentialquotienten $\frac{dz}{dy}$, also auf die Richtung der Nulllinie, ist dies ohne Einfluß. Die Nulllinie verschiebt sich also dabei parallel zu sich selbst. Wenn etwa u und v doppelt so groß geworden sind, als vorher, müssen wir y und z überall halb so groß als vorher annnehmen, um Gl. (65) wieder zu befriedigen. Daraus folgt, daß die Nulllinie um so näher an den Schwerpunkt heranrückt, je weiter sich der zugehörige Angriffspunkt entfernt und zwar so, daß das Produkt der Abstände beider vom Schwerpunkte konstant bleibt. Die Nulllinie schneidet die Zentralellipse, wenn der Angriffspunkt außerhalb der Ellipse liegt und sie geht außen vorbei im umgekehrten Falle. Wenn der Angriffspunkt ins Unendliche rückt, geht die Nulllinie zuletzt durch den Schwerpunkt selbst. — Dieses Resultat war schon nach dem Früheren zu erwarten, denn in diesem Falle kommt die achsiale Belastung gegenüber dem biegenden Kräftepaare nicht mehr in Betracht und wir können geradezu den Fall der reinen Biegung als jenen Sonderfall der exzentrischen Belastung betrachten, bei dem diese Belastung durch eine unendlich ferne und dabei unendlich kleine Kraft von endlichem Momente hervorgebracht wird. Dies führt uns nur wieder auf eine aus der allgemeinen Statik bekannte Deutung eines

Kräftepaares. — Wenn umgekehrt der Angriffspunkt mit dem Schwerpunkte zusammenfällt, rückt die Nulllinie ins Unendliche, d. h. wir haben eine gleichförmige Spannungsverteilung über den ganzen Querschnitt.

Wir sind jetzt im Stande, mit Hilfe der Zentralellipse für jede beliebige Lage des Angriffspunktes die zugehörige Nulllinie sofort anzugeben. Wir brauchen dazu nur einen Strahl vom Schwerpunkte nach dem Angriffspunkte zu ziehen, uns zuerst den Angriffspunkt auf dem Schnittpunkte dieses Strahles mit der Zentralellipse zu denken, die dazu gehörige diametral gegenüberliegende Tangente zu ziehen und diese schließlich parallel zu verschieben, bis sich ihr Abstand vom Mittelpunkte im umgekehrten Verhältnisse geändert hat, wie der Abstand des Angriffspunktes.

Wir wollen aber die Untersuchung noch um einen Schritt weiter führen. Der Angriffspunkt soll nämlich jetzt eine beliebige gerade Linie beschreiben. Zu jeder Lage gehört eine bestimmte Nulllinie und es fragt sich, wie sich die Lage der Nulllinie ändert, während der Angriffspunkt längs seiner Bahn fortrückt. Die Gleichung dieser Bahn sei

$$v = \alpha u + \beta,$$

wobei α und β beliebig gegebene konstante Größen sind. Wir fassen zunächst irgend zwei Lagen u_1, v_1 und u_2, v_2 auf dieser Bahn ins Auge, suchen die zugehörigen Nulllinien auf und ermitteln, in welchem Punkte beide sich schneiden. Die Gleichungen beider Nulllinien sind nach Gl. (65), wenn man $v_1 = \alpha u_1 + \beta$ setzt und ebenso für v_2

$$\frac{u_1 y}{a^2} + \frac{z}{b^2}(\alpha u_1 + \beta) = -1,$$

$$\frac{u_2 y}{a^2} + \frac{z}{b^2}(\alpha u_2 + \beta) = -1.$$

Um die Koordinaten des Schnittpunktes beider Nulllinien zu erhalten, müssen wir diese Gleichungen nach y und z auflösen. Wir finden

$$y = a^2 \frac{\alpha}{\beta}; \quad z = -\frac{b^2}{\beta}, \tag{67}$$

wie man sich auch nachträglich leicht durch Einsetzen dieser Werte in die Gleichungen überzeugt. Die Abszissen u_1 und u_2 der auf der Bahn des Angriffspunktes beliebig herausgegriffenen beiden Punkte sind aus den gefundenen Werten vollständig herausgefallen. Daraus folgt, daß es gleichgültig ist, welche besonderen Punkte man auf der Bahn ausgewählt hat; alle Nulllinien, die zu den Angriffspunkten auf dieser Bahn gehören, schneiden sich gegenseitig in demselben Punkte, dessen Koordinaten durch die Gl. (67) angegeben sind. Mit anderen Worten heißt dies: Wenn sich der Angriffspunkt längs einer beliebigen Geraden verschiebt, dreht sich die Nulllinie um einen dieser Geraden zugeordneten Punkt.

Die Art dieser Zuordnung stimmt mit jener überein, die wir schon vorher kennen lernten. Denn denkt man sich jetzt umgekehrt den durch die Gl. (67) angegebenen Punkt als Angriffspunkt, setzt also

$$u = a^2 \frac{\alpha}{\beta}, \qquad v = -\frac{b^2}{\beta}$$

und führt diese Werte in die Gleichung der Nulllinie Gl. (65) ein, so geht diese über in

$$z = \alpha y + \beta.$$

Wenn man also den Punkt, um den sich vorher die Nulllinie drehte, nachher als Angriffspunkt wählt, so fällt die ihm zugehörige Nulllinie mit jener Linie zusammen, die vorher als Bahn des Angriffspunktes gedient hatte.

Wie sehen, daß hierdurch jedem Punkte der Ebene eine Gerade und umgekehrt eindeutig zugeordnet ist. Dies erinnert an die Lehre von den Polaren in der Geometrie der Kegelschnitte. Nur insofern besteht hier ein Unterschied, als nicht wie bei den Polaren, einer den Kegelschnitt (die „Ordnungskurve") berührenden Geraden der Berührungspunkt, sondern der diametral gegenüberliegende Punkt zugeordnet ist und ähnlich in jedem anderen Falle. In Anlehnung an den Sprachgebrauch in der Geometrie der Kegelschnitte bezeichnet man

daher die einander entsprechenden Punkte und Geraden als die Antipole und die Antipolaren.

Mit diesen Bezeichnungen können wir die vorausgehenden Ergebnisse in den Sätzen zusammenfassen:

1) Jedem Punkte der Querschnittsebene, der als Angriffspunkt der Belastung gedacht wird, ist die Antipolare dieses Punktes in Bezug auf die Zentralellipse als Nulllinie zugeordnet, und umgekehrt entspricht jeder als Nulllinie beliebig gewählten Geraden der Querschnittsebene der Antipol dieser Geraden als Angriffspunkt der Belastung.

2) Wenn sich der Angriffspunkt auf einer beliebigen Geraden verschiebt, dreht sich die zugehörige Nulllinie um den Antipol dieser Geraden.

3) Wenn sich die Nulllinie um einen beliebigen Punkt dreht, schreitet der zugehörige Angriffspunkt auf der Antipolaren dieses Punktes weiter.

Man kann noch hinzufügen:

4) Wenn der Angriffspunkt auf einer Kurve zweiter Ordnung fortschreitet, hüllt die Nulllinie einen anderen Kegelschnitt ein und umgekehrt.

Bei der Anwendung dieser Sätze ist es gleichgültig, ob die Nulllinie die Querschnittsfläche durchschneidet oder außerhalb verläuft. Im letzten Falle kommen überhaupt nur Spannungen σ von gleichem Vorzeichen im Querschnitte vor. Man kann sich nun noch die Aufgabe stellen, alle Lagen des Angriffspunktes anzugeben, bei denen nur Spannungen von einerlei Vorzeichen im Querschnitte auftreten. Alle diese Angriffspunkte liegen innerhalb einer Fläche, die als der Kern des Querschnitts bezeichnet wird. Um den Kern des Querschnitts zu erhalten, denke man sich alle möglichen Linien gezogen, die den Querschnittsumfang entweder berühren oder überhaupt mindestens einen Punkt mit ihm gemeinsam haben, ohne ins Innere der Fläche einzutreten. Wir wollen den Inbegriff aller dieser Linien den den Querschnitt umhüllenden

Tangentenbüschel nennen. Jedem Strahle dieses Büschels entspricht ein Punkt des Kernumrisses, nämlich der Antipol des Strahles. Während der Strahl alle möglichen Lagen des Tangentenbüschels durchläuft, beschreibt der Antipol den Umfang des Kerns. Denkt man sich, nachdem der Kernumfang konstruiert ist, den Angriffspunkt in die Fläche des Kerns gerückt, so rückt die zugehörige Nulllinie weiter nach außen und man erkennt daraus, daß in der Tat nur Spannungen gleichen Vorzeichens bei dieser Lage des Angriffspunktes auftreten können. Dies gilt auch noch, wenn der Angriffspunkt auf dem Umfange des Kernes liegt; dabei sinkt nur an einer oder auch an einigen Stellen des Querschnittsumfanges die Spannung bis auf Null herab. Sobald aber der Angriffspunkt über den Kern hinaus gerückt wird, kommen Spannungen von entgegengesetztem Vorzeichen im Querschnitte vor.

Diese Betrachtungen werden namentlich bei der Berechnung von Mauerpfeilern angewendet. Da Mauerwerk in gewöhnlicher Ausführung wenig widerstandsfähig gegen Zugbeanspruchung ist, muß man diese zu vermeiden suchen, und man stellt daher als Regel auf, daß der Angriffspunkt der Belastung, die in einem Querschnitte des Mauerpfeilers übertragen wird, nicht außerhalb des Querschnittkernes liegen soll. Diese Forderung beruht auf der allen diesen Untersuchungen zu Grunde liegenden Voraussetzung, daß die Spannungsverteilung linear ist. Man kann freilich Bedenken tragen, ob diese Vorausetzung gerade bei Mauerwerk, das dem Hookeschen Gesetze sicher nicht gehorcht, hinreichend genau zutrifft. Indessen hat sich die Regel ganz wohl bewährt und man braucht daher kein Bedenken gegen ihre Anwendung zu tragen.

Schließlich soll die Aufsuchung des Kerns noch an einigen einfachen Beispielen, zunächst für den rechteckigen Querschnitt erläutert werden. Die Querschnittsseiten seien, wie in Abb. 23 angegeben, mit a und b bezeichnet. Wie schon vorher gefunden (S. 99), ist das Trägheitsmoment des Rechtecks für die zur Seite a parallele Hauptachse gleich

$\frac{ab^3}{12}$, der Trägheitsradius also gleich $\frac{b}{\sqrt{12}} = 0{,}2887\,b$. Für die andere Hauptachse hat man nur a an die Stelle von b zu setzen. Wir haben damit die Halbachsen der Zentralellipse gefunden, tragen diese auf den Symmetrieachsen des Querschnitts auf und konstruieren die Ellipse. Von dem Tangentenbüschel, der den Querschnitt einhüllt, kommen vier ausgezeichnete Lagen in Betracht, nämlich jene, die mit je einer Querschnittsseite zusammenfallen. Bei den übrigen Lagen geht der Strahl durch eine der Ecken des Rechtecks. Aus einer Hauptlage geht der Strahl daher in die nächste über, indem er sich um die dazwischen liegende Ecke dreht. Dabei beschreibt der Antipol, wie wir früher fanden, eine gerade Linie. Wir erkennen daraus, daß der Kernumriß ein Viereck und zwar, der Symmetrie wegen, ein Rhombus ist. Es genügt daher, die auf den Hauptachsen liegenden Eckpunkte aufzusuchen. Dem Strahle $\alpha\alpha$ des Tangentenbüschels entspricht der Antipol A. Der mit z bezeichnete Abstand dieses Punktes vom Schwerpunkte multipliziert mit dem Abstande der Linie $\alpha\alpha$, also mit $\frac{b}{2}$ ist gleich dem Quadrate des Trägheitsradius, also

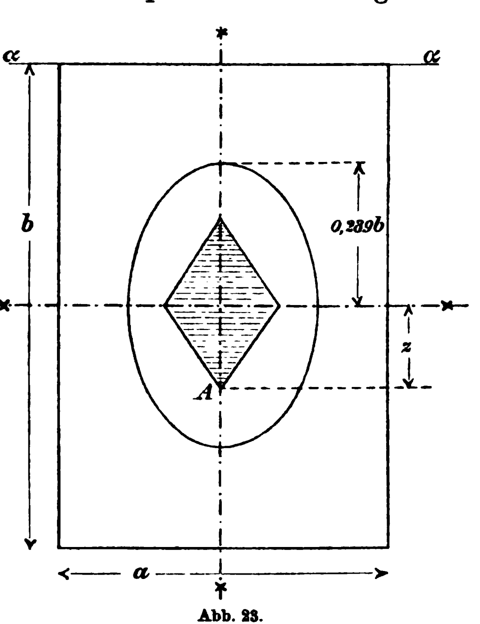


Abb. 23.

$$z \cdot \frac{b}{2} = \frac{b^2}{12} \quad \text{oder} \quad z = \frac{b}{6}.$$

Jede Diagonale der Kerns ist daher gleich dem dritten

Teile der zu ihr parallelen Rechteckseite. Dies entspricht der Regel, daß bei Mauerpfeilern der Angriffspunkt der Belastung, falls er in einer Symmetrieebene enthalten ist, im mittleren Drittel der Fuge bleiben soll. — Der Kern ist in Abb. 23 durch Schraffierung hervorgehoben.

Für eine kreisförmige Querschnittsfläche ist der Kern natürlich selbst wieder ein Kreis. Um das Trägheitsmoment einer Kreisfläche zu berechnen, geht man am einfachsten von dem polaren Trägheitsmomente aus. Ein Ring vom Radius r und der Breite dr trägt, da alle seine Flächenelemente gleichen Abstand vom Mittelpunkte haben, $2\pi r^3 dr$ zu Θ_p bei. Wird der Radius des Kreises mit a bezeichnet, so hat man daher

$$\Theta_p = 2\pi \int_0^a r^3 dr = \frac{\pi a^4}{2}.$$

Für alle in der Querschnittsebene enthaltenen Achsen ist Θ gleich groß und nach dem in Gl. (61) ausgesprochenen Satze daher halb so groß als Θ_p. Wir haben daher für Θ und den Trägheitsradius i

$$\Theta = \frac{\pi a^4}{4} \quad \text{und} \quad i = \frac{a}{2}.$$

Das Produkt aus dem Kernradius z und dem Abstande einer den Querschnittsumfang berührenden Tangente ist gleich dem Quadrate des Trägheitsradius, daher $z = \frac{a}{4}$, womit die Aufgabe gelöst ist.

Ein elliptisch begrenzter Querschnitt wird am einfachsten als Projektion eines Kreises aufgefaßt. Ist a die große, b die kleine Halbachse und setzt man $b = a \cos \alpha$, versteht also unter α den Neigungswinkel jener Kreisfläche gegen die Projektionsebene, so hat man für das Trägheitsmoment Θ_a in Bezug auf die große Hauptachse

$$\Theta_a = \int z^2 dF = \cos^3 \alpha \int z_1^2 dF_1 = \cos^3 \alpha \cdot \frac{\pi a^4}{4} = \frac{\pi a b^3}{4}.$$

Dabei sind unter z_1 und dF_1 jene Größen zu verstehen, deren Projektionen z und dF bilden. Ebenso hat man

$$\Theta_b = \int y^2 dF = \cos\alpha \int y_1{}^2 dF_1 = \cos\alpha \frac{\pi a^4}{4} = \frac{\pi a^3 b}{4},$$

denn hier sind die Abstände y_1 und y einander gleich, da y_1 parallel zur Projektionsebene geht. Für die Trägheitsradien findet man hieraus durch Division mit dem Flächeninhalte der Ellipse

$$i_a = \frac{b}{2} \quad \text{und} \quad i_b = \frac{a}{2}.$$

Die Zentralellipse ist daher dem Querschnittsumrisse ähnlich. Auch der Kern ist eine hierzu ähnliche und ähnlich liegende Ellipse, deren Halbachsen, die sich ganz wie beim Kreise berechnen lassen, den vierten Teil jener vom Querschnittsumrisse ausmachen.

§ 22. Berechnung der Biegungsspannungen mit Hilfe des Kerns.

Schon früher wurde darauf hingewiesen, daß der Fall der reinen Biegungsbeanspruchung als ein Sonderfall der exzentrischen Belastung aufgefaßt werden kann. Wir können daher die Entwicklungen des letzten Paragraphen benutzen, um noch eine andere Lösung der schon in § 20 behandelten Aufgabe daraus abzuleiten.

In Abb. 24 ist der Querschnitt als Rechteck gewählt; er könnte aber ebenso gut auch irgend eine andere Gestalt haben. Zentralellipse und Querschnittskern sind ebenso wie in Abb. 23 eingetragen. Mit BB ist die Spur der Ebene bezeichnet, in der das Kräftepaar vom Biegungsmomente M liegen möge. Wir fassen dieses Kräftepaar als eine unendlich kleine und unendlich ferne Kraft auf, deren Angriffspunkt daher der unendlich ferne Punkt der Graden BB ist. Die zugehörige Nulllinie NN ist die Antipolare dieses Punktes und sie geht daher in der Richtung des zu BB konjugierten Durchmessers der Zentralellipse. Wir finden diese Richtung, indem wir im

Durchschnittspunkte von BB mit der Zentralellipse eine Tangente konstruieren. Zu dieser geht NN parallel. Die größte Spannung tritt an den Kanten auf, die den größten Abstand, nämlich den Abstand e von der Nulllinie haben. Um diese Spannung, die mit σ_0 bezeichnet werden soll, zu berechnen, schreiben wir noch die Bedingung an, daß das Moment aller Spannungen gleich dem Momente des biegenden Kräftepaares für die Momentenachse NN sein muß. Daß die Spannungen ein Kräftepaar liefern, das in der Ebene der äußeren Kräfte liegt, ist schon durch die Festsetzung der richtigen Lage der Nulllinie verbürgt; wir brauchen uns also nur noch um die Größe der Momente zu kümmern.

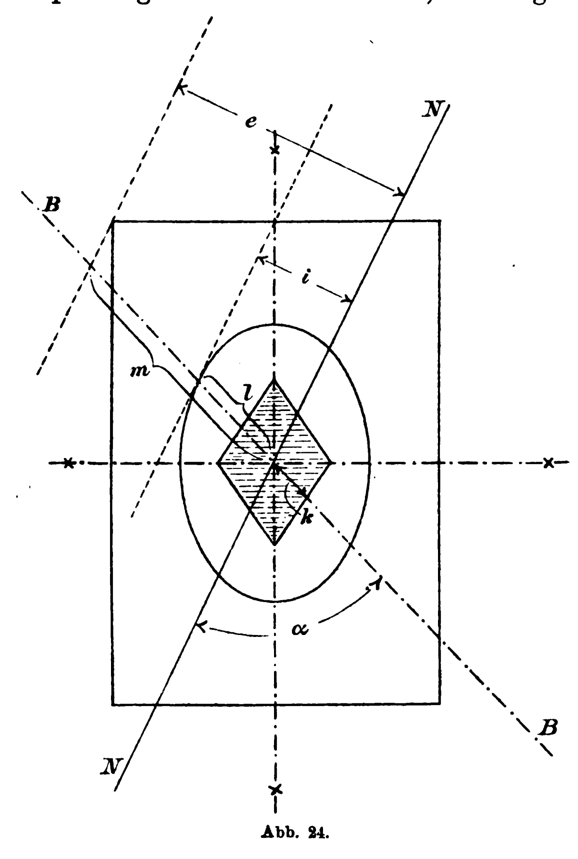


Abb. 24.

Hierbei ist zu beachten, daß die Nulllinie NN nicht senkrecht zur Ebene des Biegungsmomentes M steht, sondern einen Winkel α mit ihr bildet. Das Moment des biegenden Kräftepaares in Bezug auf die Achse NN ist daher nicht gleich M, sondern gleich $M \sin \alpha$ zu setzen. Für die Spannung in irgend einem Flächenelemente dF, das den Abstand y von NN

haben möge, können wir nach dem Navierschen Spannungsverteilungsgesetze $\frac{\sigma_0}{e} y$ setzen und die Momentengleichung lautet daher

$$M \sin \alpha = \frac{\sigma_0}{e} \int y^2 dF = \frac{\sigma_0}{e} \Theta_N,$$

wenn mit Θ_N das Trägheitsmoment für die Achse NN bezeichnet wird.

Andererseits ist aber nach der Definition des Kerns

$$km = l^2,$$

oder, wenn wir an Stelle der drei auf BB liegenden Strecken ihre Projektionen auf eine zu NN senkrechte Linie einführen,

$$k \sin \alpha \cdot e = i^2 = \frac{\Theta_N}{F},$$

denn i ist nach der Definition der Zentralellipse der zu NN gehörige Trägheitshalbmesser. Setzt man den hieraus folgenden Wert von Θ_N in die erste Gleichung ein und löst sie nach σ_0 auf, so erhält man das einfache Resultat

$$\sigma_0 = \frac{M}{F \cdot k}. \tag{68}$$

Man kann diesem noch eine etwas andere Fassung geben, wenn man dem durch Gl. (47) zuerst eingeführten Begriffe des Widerstandsmoments W eine erweiterte Bedeutung verleiht, nämlich darunter das Produkt aus der Querschnittsfläche F und der „Kernweite" k versteht. Diese neue Definition steht nämlich nicht im Widerspruche mit der durch Gl. (47) gegebenen, die nur für den Fall gültig war, daß die Biegungsebene durch eine Querschnittshauptachse geht. In der Tat ist in diesem Falle $ky_0 = i^2$ und daher $\frac{\Theta}{y_0} = F \cdot k$. Im Sinne dieser erweiterten Definition läßt sich Gl. (68) auch in der Form

$$\sigma_0 = \frac{M}{W} \tag{69}$$

schreiben und sie stimmt dann genau mit der für die gerade Belastung abgeleiteten Gl. (48) überein.

Die Berechnung nach diesen Formeln ist an sich viel einfacher als die in § 20 gegebene. Indessen wird dabei voraus-

gesetzt, daß der Querschnittskern bereits bekannt sei. Wenn in den Profiltabellen der Hüttenwerke der Kern in jedes Walzeisenprofil eingezeichnet wäre, was schon öfters vorgeschlagen wurde und nächstens vielleicht auch einmal ausgeführt wird, würde sich die Anwendung der Gl. (68) und (69) schnell einbürgern. So lange der Kern aber nicht von vornherein gegeben ist, wird man mit der Rechnung schneller auf dem früher angegebenen Wege fertig.

Mit Hilfe dieser Betrachtung kann man auch leicht beurteilen, welche Richtung der Biegungsebene BB die größte Gefahr für die Festigkeit des Stabes bedingt, d. h. bei welcher Richtung die Kantenspannung σ_0 den größten Wert annimmt, wenn das Biegungsmoment M ein für allemal gegeben ist (also etwa bei gegebenen Lasten). Es ist jene Richtung, zu der die kleinste Kernweite k gehört, beim rechteckigen Querschnitte also die zu einer Diagonale senkrechte Richtung. Das letzte Resultat geht übrigens auch schon aus der in § 20 gegebenen Rechnung hervor, denn die in Abb. 21 mit c bezeichnete Größe, die in Gl. (63) allein als von der Richtung der Biegungsebene abhängiger Faktor auftrat, nimmt in dem bezeichneten Falle ihren größten Wert an; sie wird dann gleich der Rechtecksdiagonale.

§ 23. Berechnung der Schubspannungen im gebogenen Stabe.

Bisher stand immer der Fall der reinen Biegungsbeanspruchung im Vordergrunde und für diesen hatten wir Grund genug zu der Annahme, daß überhaupt keine Schubspannungen im Querschnitte übertragen werden. Wir betrachten jetzt den allgemeineren Fall, daß die äußeren Kräfte am einen Stabteile neben einem Biegungsmomente auch noch eine Scherkraft V liefern. Nach dem Grundsatze der Superposition verschiedener Spannungszustände wird dadurch an der Verteilung der Normalspannungen σ über den Querschnitt nichts geändert. Wir können daher die früher durchgeführte Berechnung von σ auch im allgemeineren Falle ohne weiteres anwenden. Dagegen

bleibt hier noch die Frage zu entscheiden, wie sich die Schubspannungen, die zusammen die Resultierende V geben, über den Querschnitt verteilen. Wir sind dabei in etwas günstigerer Lage als bei der Frage der Verteilung der Normalspannungen, die wir ungefähr in der gleichen Weise lösen mußten wie Alexander, als er den Gordischen Knoten durchhieb. In der Tat ist die Verteilung der Schubspannungen durch die Verteilung der Normalspannungen schon bis zu einem gewissen Grade mit bedingt. Man erkennt dies schon aus den allgemeinen Betrachtungen des ersten Abschnitts. Die erste der Gleichungen (5), die das Gleichgewicht der Spannungen an einem unendlich kleinen Parallelepiped aussprechen, lautet, wenn wir die Komponente X der äußeren Kraft gleich Null setzen,

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0.$$

Denken wir uns die X-Achse in die Stabmittellinie und die Y-Achse in die Ebene der äußeren Kräfte, also in die Richtung von V gelegt, so spricht diese Gleichung den notwendigen Zusammenhang zwischen der Verteilung der Normalspannungen σ und der Schubspannungskomponenten τ_{xy} und τ_{xz} über den Querschnitt aus, denn nach den Gleichungen (4) ist $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ und $\tau_{xz} = \tau_{zx}$. Freilich reicht diese Gleichung allein noch nicht vollständig aus, die Schubspannungskomponenten zu berechnen. Es muß immer noch eine mehr oder minder willkürliche Annahme hinzutreten.

Wir wollen zunächst den Fall behandeln, daß der Querschnitt des Stabes ein Rechteck ist und die Kraftebene durch eine Hauptachse geht. Dann liegt es nahe, $\tau_{xz} = 0$ zu setzen, denn es ist kein Grund zu der Vermutung gegeben, daß Schubspannungen im Querschnitte rechtwinklig zur Ebene der äußeren Kräfte auftreten sollten. Wir wissen vielmehr sicher, daß an den zur Kraftebene parallelen Querschnittskanten $\tau_{xz} = 0$ sein muß, weil an den dazu gehörigen Seitenflächen des Balkens von außen her keine Kräfte τ_{zx} einwirken. — Mit dieser Annahme, die schließlich darauf hinauskommt, daß alle Schichten, in die man sich den Balken parallel zur Kraftebene zerlegt

denken kann, gleiche Formänderungen ausführen, oder daß überhaupt alle Formänderungs- und Spannungsgrößen von der Querschnittskoordinate z unabhängig sind, geht die vorige Gleichung über in

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = -\frac{\partial \sigma_x}{\partial x},$$

und da σ_x schon überall als bekannt vorauszusetzen ist, läßt sich aus ihr die Verteilung der Schubspannungen der Höhe des Balkenquerschnitts nach leicht ableiten.

Es kommt zwar auf dasselbe hinaus, ist aber anschaulicher, wenn man diese Betrachtung durch eine andere ersetzt.

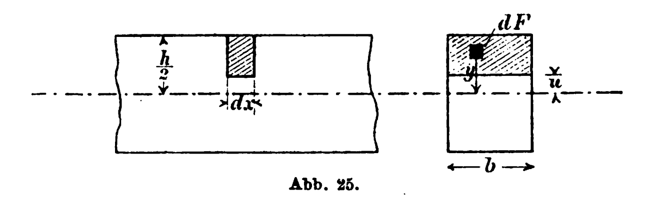


Abb. 25.

Die Gl. (5) bezogen sich auf das Gleichgewicht eines unendlich kleinen Parallelepipeds; wir wollen dieselbe Schlußfolgerung, die zu ihnen führte, jetzt auf das Gleichgewicht eines etwas größer abgegrenzten Körperteiles anwenden. In Abb. 25 ist links ein Stück der Ansichtszeichnung des Balkens, rechts der Querschnitt dargestellt, und der scheibenförmige Teil des Balkens, dessen Gleichgewicht wir untersuchen wollen, ist in beiden Projektionen durch Schraffierung hervorgehoben. Außerdem gibt Abb. 26 noch eine Gesamtübersicht des Balkens und der an ihm angreifenden Lasten. Wir stellen zunächst eine Beziehung auf, die zwischen dem Biegungsmomente M und der Scherkraft V für irgend einen Querschnitt mm besteht. Nach der Bedeutung dieser Größen hat man

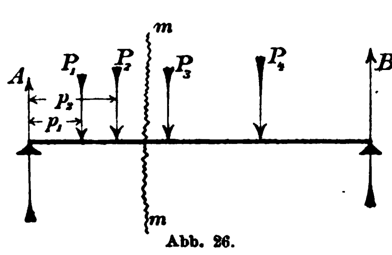


Abb. 26.

$$V = A - \sum_0^x P \quad \text{und} \quad M = Ax - \sum_0^x P(x-p).$$

Differentiiert man M nach x, so erhält man

$$\frac{dM}{dx} = A - \sum_0^x P.$$

Dabei wird vorausgesetzt, daß man beim Weiterrücken des Querschnitts um die Strecke dx nicht über den Angriffspunkt einer Einzellast hinausrückt, denn an einer solchen Stelle ist zwar M selbst stetig, $\frac{dM}{dx}$ erleidet aber einen plötzlichen Sprung. Tritt indessen eine stetig verteilte Belastung an die Stelle des Systems der Einzellasten, so bleibt die Gleichung immer noch gültig, da der Zuwachs, den M dann außerdem noch erfährt, weil ein Belastungsdifferential, das vorher zur rechten Seite zählte, auf die linke Seite übertritt, nur von der zweiten Ordnung unendlich klein ist und daher nicht in Betracht kommt.

Man hat daher, wie aus dem Vergleiche der vorstehenden Formeln hervorgeht, allgemein

$$V = \frac{dM}{dx}, \tag{70}$$

denn auch V teilt mit dem Differentialquotienten von M die Eigenschaft, seinen Wert sprungweise zu ändern, wenn der Querschnitt über den Angriffspunkt einer Einzellast hinausgerückt wird.

Man kann sich diese einfache, aber sehr wichtige Beziehung auch noch in anderer Weise klar machen. Für den Schnitt mm waren die äußeren Kräfte links vom Schnitte auf die Scherkraft V im Querschnittsschwerpunkte und das Kräftepaar vom Momente M zurückgeführt. Gehen wir um dx weiter, so muß V parallel um dx verlegt werden. Dabei tritt aber noch ein Kräftepaar Vdx auf, das die Änderung von M darstellt; aus $dM = Vdx$ folgt aber Gl. (70) sofort.

An dem in Abb. 25 angegebenen scheibenförmigen Körper-

teile greifen die Spannungen an den drei Schnittflächen an. Wir wollen dabei nur auf das Gleichgewicht gegen Verschieben in horizontaler Richtung achten. Von den Spannungen an den quer zur Stabachse gehenden Schnittflächen kommen dann nur die Normalspannungen σ in Betracht. Nach Gl. (46) ist in dem Schnitte mit der Abszisse x

$$\sigma = \frac{M}{\Theta} y,$$

und an dem Schnitte mit der Abszisse $x + dx$ kommt noch ein Differential hinzu, das sich durch Differentiieren, also aus

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial x} \cdot \frac{y}{\Theta} = \frac{V y}{\Theta}$$

leicht feststellen läßt. Die Normalspannungen an beiden Schnittflächen wirken in entgegengesetzter Richtung; für das Gleichgewicht gegen Verschieben kommt also nur ihr Unterschied in Frage. Im ganzen erhalten wir dafür

$$\int_u^{\frac{h}{2}} d\sigma dF = dx \frac{V}{\Theta} \int_u^{\frac{h}{2}} y dF,$$

wenn die Integration über den schraffierten Teil des Querschnitts ausgedehnt wird.

In der dritten Schnittfläche wirkt nur die Schubspannung τ_{yx} in horizontaler Richtung und zwar über die Fläche $b dx$. Die Gleichgewichtsbedingung liefert

$$\tau_{yx} b dx = dx \frac{V}{\Theta} \int_u^{\frac{h}{2}} y dF,$$

woraus τ_{yx} und damit auch die gesuchte Schubspannung τ_{xy} im Querschnitte und zwar in der Entfernung u von der Nulllinie,

$$\tau_{xy} = \frac{V}{b\Theta} \int_u^{\frac{h}{2}} y dF \qquad (71)$$

folgt. Das Integral stellt das statische Moment des über u

hinaus liegenden Querschnittsteiles in Bezug auf die Nulllinie dar. Für den rechteckigen Querschnitt ist

$$\int_u^{\frac{h}{2}} y\,dF = b\left(\frac{h^2}{8} - \frac{u^2}{2}\right) \quad \text{und daher} \quad \tau = \frac{V}{\Theta}\left(\frac{h^2}{8} - \frac{u^2}{2}\right).$$

Wir wollen aber für dieses statische Moment außerdem noch den Buchstaben S setzen, also Gl. (71) in der Form

$$\tau_{xy} = \frac{VS}{b\Theta} \tag{72}$$

schreiben, denn offenbar kann die vorausgehende Betrachtung auch dann angewendet werden, wenn der Querschnitt zwar nicht ein einfaches Rechteck bildet, aber doch dort, wo wir τ berechnen wollen, durch zwei parallele Seiten begrenzt wird, wie z. B. der Steg eines I-Trägers. Auch für solche Fälle ist durch Gl. (72) die Aufgabe gelöst, denn das statische Moment S, das zu einem gegebenen u gehört, kann immer leicht gefunden werden.

Durch Gl. (72) ist τ als Funktion von u bestimmt und damit die Spannungsverteilung gegeben. Wir erkennen aus dieser Gleichung, daß τ am Rande des Querschnitts verschwindet, also gerade dort, wo die Normalspannung ihren größten Wert annimmt, und daß umgekehrt τ am größten wird in der Nulllinie, also da, wo die Normalspannung verschwindet. Für den rechteckigen Querschnitt ist τ eine Funktion zweiten Grades von u. Wenn wir diese Funktion durch eine Kurve darstellen, wie wir es früher taten, um die Verteilung der Normalspannungen vor Augen zu führen, erhalten wir jetzt eine Parabel. Das lineare Spannungsverteilungsgesetz gilt also nur für die Normalspannungen und nicht für die Schubspannungen.

Es bleibt jetzt noch die Verteilung der Schubspannungen über einen anders gestalteten Querschnitt zu besprechen. Wir wählen zur Erläuterung des Verfahrens einen kreisförmigen Querschnitt. Bei diesem dürfen wir nicht, wie vorher beim rechteckigen Querschnitte, die Schubspannungskomponenten τ_{xz}, die quer zur Kraftebene gehen, gleich Null setzen. Vielmehr

muß am Umfange die resultierende Schubspannung in die Richtung der Querschnittstangente fallen, wenigstens dann, wenn am Umfange des Stabes keine äußeren Kräfte in der Richtung der Stabachse auftreten. Dies folgt aus dem Gleichgewichte eines unendlich kleinen Parallelepipeds, von dem eine Kante mit einem Elemente des Querschnittsumrisses zusammenfällt. Wenn die Schubspannung am Umfange eine Komponente in der Richtung der Normalen zum Querschnittsumrisse haben sollte, müßte, um das Gleichgewicht gegen Drehen zu sichern, notwendig auch eine Kraft auf der Mantelfläche des Stabes in Richtung der Stabachse übertragen werden, aus demselben Grunde, aus dem wir früher $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ fanden.

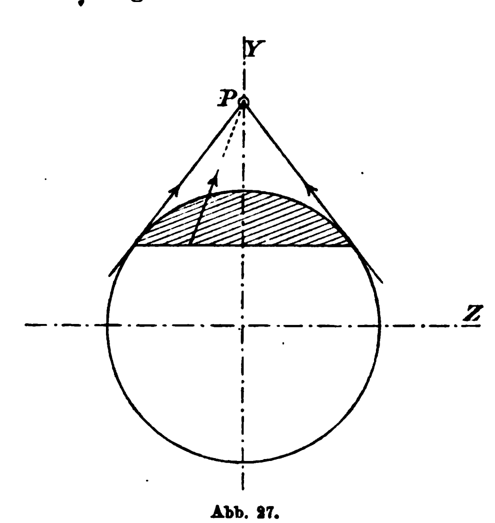


Abb. 27.

Es sei jetzt ausdrücklich vorausgesetzt, daß am Umfange des Stabes, wenigstens in der Umgebung des Querschnitts, für den wir die Schubspannungen berechnen wollen, keine derartige äußere Kraft auftritt. Dann müssen notwendig die Schubspannungen am Rande des Querschnitts in die Richtung der Tangente fallen. Für einen Punkt auf der Y-Achse müssen sie der Symmetrie wegen in die Richtung dieser Achse fallen und dazwischen werden sie irgend eine mittlere Richtung einnehmen. Man wird nicht viel von der Wahrheit abweichen, wenn man annimmt, daß die Schubspannungen in jedem Punkte einer zur Y-Achse senkrecht gezogenen Sehne alle durch jenen Punkt P in Abb. 27 gehen, in dem die Tangente die Y-Achse trifft. Bedenklicher ist freilich die andere Annahme, die man hiermit verbindet, nämlich daß die in der Richtung der Y-Achse

gehende Komponente τ_{xy} auch hier noch unabhängig von der Querschnittkoordinate z sei. Sie ist indessen die einfachste, die man machen kann, und sie wird daher, um zu einem Näherungsresultate zu gelangen, zugrunde gelegt.

Auf Grund dieser Annahmen läßt sich die Aufgabe jetzt leicht lösen. Man berechnet zuerst τ_{xy} nach Gl. (72), wobei S wieder das statische Moment des in Abb. 27 schraffierten Querschnittsteiles bedeutet, der oberhalb der Stelle liegt, für die τ_{xy} aufgesucht wird und fügt die Komponenten τ_{xz} entsprechend der Bedingung hinzu, daß die Resultierende durch den Punkt P gehen soll.

Anmerkung. Für die Berechnung der Nietbolzen, die auf Abscheren beansprucht werden, ist die vorhergehende Betrachtung nicht anwendbar, weil am Umfange dieser Bolzen von den sie umschließenden Blechen her Kräfte, nämlich Reibungen, übertragen werden können, die in der Richtung der Stabachse gehen, während hier ausdrücklich vorausgesetzt war, daß solche Kräfte fehlen sollten. — Für die Berechnung der Nieten stützt man sich besser auf die Ergebnisse von Festigkeitsversuchen, die mit Nietverbindungen angestellt werden. Nach diesen Versuchen stellt sich die Festigkeit der Nieten ungefähr so hoch, als wenn sich die Schubspannungen gleichförmig über den Querschnitt verteilten.

§ 24. Die Spannungstrajektorien.

Da bei dem allgemeinen Falle der Biegungsbeanspruchung eines Stabes außer den Normalspannungen auch noch Schubspannungen übertragen werden, ist die Normalspannung keine Hauptspannung. Die Hauptrichtungen des Spannungszustandes sind vielmehr im allgemeinen gegen die Längsachse des Stabes unter irgend einem Winkel geneigt.

Es ist daher wünschenswert, noch eine Übersicht darüber zu erlangen, in welchen Richtungen die Hauptspannungen an den verschiedenen Teilen des Stabes auftreten. Man konstruiert zu diesem Zwecke Linien, die überall in die Richtungen der Hauptspannungen fallen. Diese Linien werden als Spannungstrajektorien bezeichnet. Um sie zu erhalten, legt man eine Anzahl Querschnitte durch den Stab, berechnet

für verschiedene Stellen dieser Querschnitte die Normalspannung und die Schubspannung, wie es in den vorausgehenden Paragraphen gelehrt wurde, und bestimmt dann nach Gl. (11) die Winkel φ, die die Hauptrichtungen des Spannungszustandes mit der Stabachse bilden. Nachdem man so eine genügende Zahl von Tangenten der Spannungstrajektorien konstruiert hat, kann man diese leicht freihändig in die Zeichnung des Stabes eintragen. Anstatt dessen kann man auch die Gleichungen

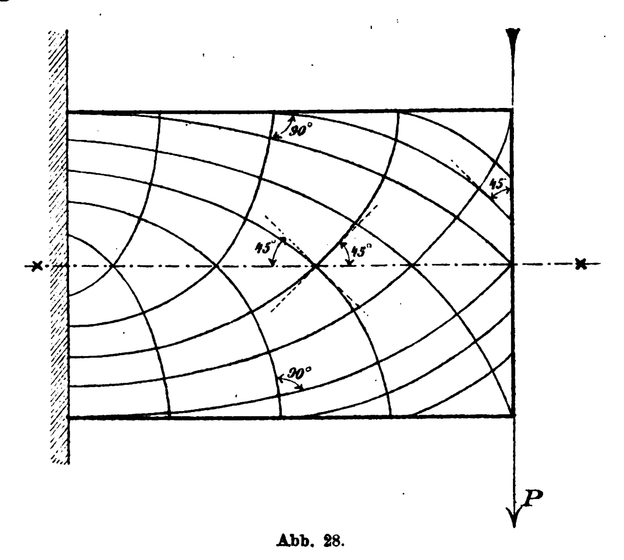


Abb. 28.

dieser Kurven mit Hilfe einer Integration erhalten, da die Tangente ihres Neigungswinkels, also der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ für sie bekannt ist.

Ich werde diese Rechnungen hier nicht durchführen, sondern mich damit begnügen, in Abb. 28 den Verlauf der Spannungstrajektorien für den Fall eines Stabes von rechteckigem Querschnitte, der an einem Ende eingemauert ist und am freien Ende eine Einzellast trägt, anzugeben. In der neutralen Schicht schneiden die Spannungstrajektorien die Stabachse unter Winkeln von 45°, da hier der Fall der reinen Schubspannung vorliegt, und an der oberen und der unteren

Begrenzung steht die eine senkrecht zur Kante und die andere berührt sie. Selbstverständlich steht die eine Schar überall senkrecht zur anderen.

§ 25. Einfluß der Schubspannungen auf die Bruchgefahr.

Unter gewöhnlichen Umständen hängt die Beanspruchung des Stabes nur von dem größten Werte ab, den die Normalspannung σ an den äußersten Fasern annimmt. Da dort die Schubspannung verschwindet, braucht man auf sie bei der Festigkeitsberechnung in der Regel gar nicht zu achten. Das ändert sich aber, wenn der Stab sehr kurz und dick ist. Wegen der geringen Länge sind die Hebelarme und daher die Biegungsmomente und mit diesen auch die Normalspannungen σ klein, während die Schubspannungen davon nicht berührt werden. Bei kurzen, dicken Stäben kann daher die Beanspruchung auf Schub in der Querschnittsmitte gefährlicher werden, als die Beanspruchung auf Zug oder Druck in der äußersten Faser.

Hierzu bemerke ich noch, daß die Beachtung der Schubspannungen namentlich dann von Wichtigkeit werden kann, wenn das Material eine besonders geringe Schubfestigkeit hat, wie es beim Holze in Schnittrichtungen, die parallel zu den Fasern laufen, zutrifft. Es kommt nicht selten vor, daß ein Holzbalken, dessen Spannweite selbst zehnmal so groß sein kann als die Querschnittshöhe, durch die Überwindung der Schubfestigkeit in der neutralen Schicht bricht, wenn er in der Mitte belastet wird.

Es möge daher noch berechnet werden, von welchem Werte dieses Verhältnisses ab die Bruchgefahr nur noch durch die Normalspannungen bedingt ist. Ich setze dabei einen Holzbalken von der Länge l und der Querschnittshöhe h voraus, der in der Mitte die Last P trägt. Dann ist $V = P/2$ und $M = Pl/4$ zu setzen. Für die größte Normalspannung σ erhält man

$$\sigma = \frac{6Pl}{4bh^2}$$

und für die Schubspannung τ in der neutralen Schicht nach Gl. (72)

$$\tau = \frac{\frac{P}{2} \cdot \frac{bh^2}{8}}{b\Theta} = \frac{3}{4} \cdot \frac{P}{bh}.$$

Wenn das Verhältnis zwischen der Druckfestigkeit (die beim Holze gewöhnlich etwas kleiner ist als die Zugfestigkeit, beide für Schnittrichtungen senkrecht zur Faser gerechnet) und der Schubfestigkeit zwischen den Fasern mit n bezeichnet wird, bestimmt sich das Verhältnis zwischen l und h aus der Gleichung

$$\frac{6Pl}{4bh^2} = n\frac{3}{4} \cdot \frac{P}{bh}, \quad \text{also} \quad \frac{l}{h} = \frac{n}{2}.$$

Nun wird n nicht leicht größer als etwa 10, die Spannweite darf also nur etwa fünfmal so groß sein, als die Querschnittshöhe, wenn eine Bruchgefahr durch die Schubspannungen gegeben sein soll; ausnahmsweise (wie es scheint, besonders bei Weißtannenholz) kann n aber auch noch größer werden. So abnorm große Werte von n kommen indessen bei anderen Materialien als Holz überhaupt nicht vor, auch nicht bei gewalztem Schweißeisen, das sich dem Holze noch am meisten nähert, und es ist daher gerechtfertigt, wenn man bei gewöhnlichen Biegungsberechnungen die Schubspannungen ganz unberücksichtigt läßt.

Ein Fall muß indessen noch erwähnt werden. Bei einem Balken von I-förmigem Querschnitte ist nämlich das statische Moment S in Gl. (72) unmittelbar unterhalb des Flantsches fast ebenso groß als für die neutrale Schicht. Die Schubspannungen erreichen daher an dieser Stelle schon beträchtliche Werte, während die Normalspannung gegenüber dem größten Werte an der äußersten Faser noch nicht viel abgenommen hat. Es kann daher vorkommen, daß die Hauptspannung an dieser Stelle größer wird als in der äußersten Faser, und zwar wird dieser Fall auch hier wieder um so eher vorkommen können, je beträchtlicher die Schubspannungen im Vergleiche zu den Normalspannungen ausfallen, also bei Stäben

von geringer Länge und großer Höhe. Eine Berechnung, die sich hierauf bezieht, befindet sich unter den Aufgaben am Schlusse des Abschnitts.

§ 26. Genietete Träger.

Ein Stab, der eine Biegungsbelastung aufnehmen soll, wird oft aus mehreren Teilen zusammengesetzt, derart, daß der Querschnitt aus der Summe der Querschnitte der einzelnen Teile besteht. Wenn die Teile des Stabes fest miteinander zusammenhingen, würden in den Flächen, in denen diese Teile aneinander grenzen, Schubspannungen übertragen werden. Diese Spannungen fallen hier fort, — soweit sie nicht etwa durch Reibungen in den Grenzflächen ersetzt werden. Damit sich aber der zusammengesetzte Stab doch ähnlich verhalten kann, als wenn er aus einem Stücke wäre, müssen die sonst durch die Schubspannungen übertragenen Kräfte durch die Verbindungsteile aufgenommen werden, die das Ganze zusammenhalten.

Sehr häufig verwendet man genietete Blechbalken, denen man einen den gewalzten I-Trägern ähnlichen Querschnitt gibt, um wie bei diesen mit möglichst wenig Materialaufwand ein möglichst großes Trägheits- oder Widerstandsmoment zu erzielen. Der Steg und die rechtwinklig dazu verlaufenden Gurtplatten werden durch Winkeleisen aneinander geschlossen und alle Teile werden durch Vernietung miteinander verbunden. Hier sind es die Nieten, durch die alle Schubspannungen übertragen werden müssen. Wir wollen berechnen, wie groß die Kraft ist, die auf einen solchen Niet trifft, der den Anschluß der Winkeleisen an den Steg bewirkt. In Abb. 29 ist ein kleines Stück von der Ansichtszeichnung

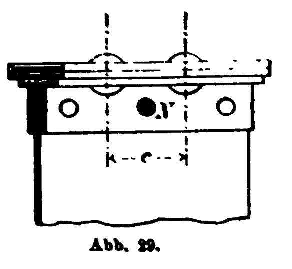


Abb. 29.

eines genieteten Blechträgers gegeben. Die Entfernung zwischen zwei aufeinander folgenden Nieten sei gleich e. Der durch einen schwarzen Kreis angegebene Niet N muß für den Unter-

schied der Normalspannungen σ in den durch ihn angeschlossenen Winkeln und Gurtplatten für zwei um e voneinander entfernte Querschnittsflächen aufkommen. In der Tat gleicht der Fall ganz dem in § 23 behandelten; es ist nur an die Stelle des Abstandes dx in Abb. 25 hier der endliche Abstand e getreten. Man hat wie dort

$$\sigma = \frac{M}{\Theta} y \quad \text{und} \quad \varDelta\sigma = \frac{\varDelta M}{\Theta} y = \frac{Ve}{\Theta} y,$$

wobei nur die endliche Differenz $\varDelta\sigma$ für das Differential $d\sigma$ eingetreten ist. Die von dem Niete zu übertragende Kraft P folgt daraus

$$P = \int \varDelta\sigma dF = \frac{Ve}{\Theta} \int y dF = \frac{Ve}{\Theta} \cdot S, \tag{73}$$

wenn mit S das statische Moment des durch den Niet angeschlossenen Querschnittsteiles in Bezug auf die Nulllinie bezeichnet wird.

Früher hat man auch öfters aus Holz sogenannte verzahnte oder verdübelte Träger zusammengesetzt. Jetzt macht man seltener davon Gebrauch und ich will daher nicht näher darauf eingehen, bemerke vielmehr nur noch, daß deren Berechnung ebenfalls nach Gl. (73) erfolgen kann.

§ 27. Die elastische Linie des gebogenen Stabes.

Bisher war unser Augenmerk nur auf die Berechnung der Spannungen gerichtet. Um die Formänderungen kümmerten wir uns nur so weit, als es nötig war, um daraus Anhaltspunkte für wahrscheinliche Annahmen über die Spannungsverteilung zu erlangen. Jetzt wollen wir uns die Frage nach der Gestalt der elastischen Linie vorlegen, also jener Linie, in die die Stabmittellinie durch die Biegung übergeht. Dabei soll aber von vornherein vorausgesetzt werden, daß der Biegungspfeil gering bleibt, da andere Fälle fast ganz ohne Bedeutung für die Anwendungen sind.

Zu diesem Zwecke berechnen wir zunächst, wie groß der Winkel $d\varphi$ ist, um den sich zwei im Abstande dx aufeinander folgende Querschnitte bei der Biegung gegeneinander drehen.

Eine Faser, die den Abstand y von der Nulllinie hat, erfährt eine Längenänderung $y d\varphi$, die nach dem Elastizitätsgesetze mit der spezifischen Spannung σ an dieser Stelle in einem Zusammenhange steht, der durch die Proportion

$$\frac{y\,d\varphi}{dx} = \frac{\sigma}{E}$$

ausgesprochen wird. Für σ führen wir den durch Gl. (46) angegebenen Wert ein und erhalten

$$d\varphi = dx\frac{M}{E\Theta}. \tag{74}$$

Diese Gleichung kann noch auf zwei andere Formen gebracht werden, die für die Anwendung meistens bequemer sind. Zunächst führen wir den Krümmungsradius ϱ der elastischen Linie mit Hilfe der Beziehung $\varrho\,d\varphi = dx$ ein und erhalten

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{M}{E\Theta} \quad \text{oder} \quad \varrho = \frac{E\Theta}{M}. \tag{75}$$

Andererseits hat man aber für ϱ nach den Lehren der analytischen Geometrie den Ausdruck

$$\varrho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

wenn jetzt y nicht mehr die Koordinate eines Punktes des Querschnitts, sondern die Ordinate der elastischen Linie bedeutet. In unserem Falle weicht aber die Kurve, deren Krümmungshalbmesser wir betrachten, nur sehr wenig von einer Geraden ab. Wenn wir die Ordinaten y von der ursprünglichen Lage der Stabachse aus rechnen, ist daher $\frac{dy}{dx}$ die Tangente eines sehr kleinen Winkels und das Quadrat dieses sehr kleinen Bruches kann daher ohne merklichen Fehler in dem vorausgehenden Ausdrucke gegen die Einheit vernachlässigt werden. Dadurch geht ϱ in den reziproken Wert von $\frac{d^2y}{dx^2}$ über und Gl. (75) liefert, wenn man dies einsetzt,

$$E\Theta\frac{d^2y}{dx^2} = -M. \tag{76}$$

Das Vorzeichen von ϱ ist nämlich zunächst unbestimmt, da im Zähler des Ausdrucks für ϱ eine Quadratwurzel steht. Es muß daher nachträglich so gewählt werden, daß es mit den übrigen Festsetzungen in Übereinstimmung seht. Nun wird M dann positiv gerechnet, wenn es den in horizontaler Lage gezeichneten Stab so krümmt, daß sich die Hohlseite nach oben hin kehrt. Zugleich wollen wir die Einsenkungen y positiv rechnen, wenn sie, wie gewöhnlich, nach abwärts gehen. In diesem Falle ist aber bei dem auf zwei Stützen ruhenden Balken $\frac{dy}{dx}$ am größten am linken Auflager des Balkens; es wird dann, wenn wir weiter nach der Mitte hin gehen, allmählich kleiner, wird dann zu Null, nimmt hierauf negative Werte an und erlangt den größten negativen Wert am rechten Auflager. Über die ganze Spannweite hin ist daher $\frac{d^2y}{dx^2}$ negativ, während M überall positiv ist, und in Gl. (76) mußte daher ein Minuszeichen beigegeben werden.

Gl. (76) wird die Differentialgleichung der elastischen Linie genannt. Um die Gleichung dieser Kurve daraus in endlicher Form zu finden, drückt man zunächst mit Hilfe der gegebenen Lasten M als Funktion von x aus und integriert Gl. (76) zweimal nach x. Dabei treten zwei Integrationskonstanten auf, deren Werte mit Hilfe der Grenzbedingungen an den Enden des Balkens ermittelt werden.

Dieses Verfahren soll an einigen einfachen Fällen erläutert werden. Zunächst sei ein Balken von überall gleichem Querschnitte gegeben, der an beiden Enden frei aufliegt und eine gleichmäßig über die ganze Länge verteilte Belastung von q kg auf die Längeneinheit trägt. Für irgend einen Querschnitt im Abstande x vom linken Auflager hat man für das Biegungsmoment, also für das Moment der links vom Querschnitte liegenden äußeren Kräfte,

$$M = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2}. \qquad (77)$$

Mit l ist dabei die Spannweite bezeichnet. Der Auflager-

druck auf beiden Seiten ist gleich $\frac{ql}{2}$, das erste Glied stellt daher das Moment des linken Auflagerdrucks dar. Die Belastung des linken Balkenteils ist qx und der Hebelarm davon gleich $\frac{x}{2}$. Das Biegungsmoment ist über die ganze Spannweite positiv und wird an den beiden Auflagern zu Null. Denkt man sich M in jedem Punkte der Stabachse rechtwinklig dazu in irgend einem Maßstabe aufgetragen, so erhält man eine Parabel. Allgemein heißt die in dieser Weise gefundene Kurve die zu der gegebenen Belastung gehörige *Momentenkurve* und die zwischen ihr und der Stabachse eingeschlossene Fläche die *Momentenfläche*.

Mit dem hier festgestellten Werte von M geht Gl. (76) über in

$$E\Theta\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{qx^2}{2} - \frac{qlx}{2}.$$

Nach zweimaliger Integration erhält man daraus

$$E\Theta y = \frac{qx^4}{24} - \frac{qlx^3}{12} + Cx + C_1,$$

wenn mit C und C_1 die beiden Integrationskonstanten bezeichnet werden. Nun muß nach den Bedingungen der Aufgabe y zu Null werden für $x = 0$ und für $x = l$, da beide Enden des Balkens durch die Auflagerung gegen vertikale Bewegungen geschützt sind. Die erste Bedingung lehrt, daß die Konstante C_1 gleich Null zu setzen ist. Zur Ermittelung von C haben wir die Gleichung

$$0 = \frac{ql^4}{24} - \frac{ql^4}{12} + Cl, \quad \text{also} \quad C = \frac{ql^3}{24},$$

und für die Gleichung der elastischen Linie in endlicher Form folgt daher

$$E\Theta y = \frac{qx^4}{24} - \frac{qlx^3}{12} + \frac{ql^3x}{24}. \tag{78}$$

Die Linie ist also vom vierten Grade. Es mag noch erwähnt werden, daß sich die hier analytisch vorgenommene Integration allgemein auch mit Hilfe einer geometrischen

Konstruktion, nämlich mit Hilfe eines Seilpolygons, ausführen läßt. Diese Betrachtungen gehören indessen zur graphischen Statik und sie werden dort eine ausführliche Darstellung erhalten.

Von besonderem Interesse ist der Wert der Einsenkung y in der Balkenmitte, also zugleich der größte Wert, den y annimmt. Man nennt diese Strecke den Biegungspfeil, der hier stets mit dem Buchstaben f bezeichnet werden soll. Mit $x = \frac{l}{2}$ erhält man aus Gl. (78)

$$f = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{E\Theta} = \frac{5}{384} \frac{Ql^3}{E\Theta}. \tag{79}$$

In der letzten Form dieser Gleichung ist unter Q die Gesamtbelastung des Balkens, also ql zu verstehen.

Zweitens sei ein Balken betrachtet, der in der Mitte der Spannweite eine Einzellast P trägt. Man hat hier

$$M = \frac{P}{2} x \tag{80}$$

und daher

$$E\Theta \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{Px}{2}$$

oder nach zweimaliger Integration

$$E\Theta y = -\frac{Px^3}{12} + Cx + C_1.$$

Zur Bestimmung der Integrationskonstanten muß aber hier ein anderes Verfahren eingeschlagen werden. Gl. (80) ist nämlich nur für solche Querschnitte gültig, die links von der Mitte liegen; rechts davon wäre

$$M = \frac{P}{2} x - P\left(x - \frac{l}{2}\right) = \frac{P(l-x)}{2}$$

zu setzen. Infolgedessen gilt auch die vorausgehende endliche Gleichung nur für die linke Hälfte der elastischen Linie. Diese Linie selbst setzt sich aus zwei Ästen zusammen, die sich in der Mitte stetig und ohne Knick aneinander schließen. Hier wird die Lösung dadurch vereinfacht, daß die Last in der Mitte angenommen wurde. Dadurch sind beide Aste der

elastischen Linie symmetrisch zueinander gestaltet und symmetrisch gelegen und es genügt, den einen Ast zu betrachten. Dieser muß nämlich der Symmetrie wegen in der Mitte eine horizontale Tangente haben. In

$$E\Theta\frac{dy}{dx} = -\frac{Px^2}{4} + C$$

muß daher die rechte Seite für $x = \frac{l}{2}$ verschwinden, also $C = \frac{Pl^2}{16}$ gesetzt werden.

Für die andere Integrationskonstante C_1 erhält man wie vorher $C_1 = 0$, weil y für $x = 0$ verschwinden muß. Für den linken Ast der elastischen Linie hat man daher schließlich die Gleichung

$$E\Theta y = \frac{Pl^2 x}{16} - \frac{Px^3}{12}. \tag{81}$$

Mit $x = \frac{l}{2}$ erhält man für den Biegungspfeil f

$$f = \frac{Pl^3}{48E\Theta}, \tag{82}$$

eine bei den Anwendungen sehr häufig gebrauchte Formel.

Trägt der Balken zwei Einzellasten P_1 und P_2 in den Abständen p_1 und p_2 vom linken Auflager, so zerfällt die elastische Linie in drei sich stetig und ohne Knick aneinander schließende Äste. Man berechnet zunächst die Auflagerkräfte. Wird der Auflagerdruck am linken Ende mit A bezeichnet, so hat man

$$M_{\mathrm{I}} = Ax; \quad M_{\mathrm{II}} = Ax - P_1(x - p_1);$$
$$M_{\mathrm{III}} = Ax - P_1(x - p_1) - P_2(x - p_2).$$

Von diesen Ausdrücken gilt M_{I} zwischen $x = 0$ und $x = p_1$, der zweite zwischen $x = p_1$ und $x = p_2$ und der dritte zwischen $x = p_2$ und $x = l$. Man hat der Reihe nach jeden dieser Ausdrücke in die Gleichung der elastischen Linie einzusetzen und diese jedesmal zu integrieren. Dadurch erhält man die endlichen Gleichungen der drei Äste, in denen zusammen sechs unbekannte Integrationskonstanten auftreten. Zu deren Be-

stimmung hat man zunächst die beiden Bedingungen, daß y an den beiden Auflagerstellen zu Null werden muß. Außerdem muß an jeder Übergangsstelle y und $\frac{dy}{dx}$ für beide Äste gleich werden. Dadurch erhält man nochmals vier Bedingungsgleichungen, die mit den vorigen zusammen zur Ermittelung der Konstanten genügen.

Dasselbe Verfahren bleibt auch noch anwendbar, wenn der Balken drei oder beliebig viele Einzellasten trägt. Es macht dann freilich an sich zwar ganz einfache, durch den Umfang, den sie annehmen, aber sehr lästige Rechnungen zur Bestimmung der verschiedenen Integrationskonstanten der einzelnen Äste nötig. In solchen Fällen kann man sich aber dadurch helfen, daß man die Gleichungen für die einzelnen Äste der elastischen Linie in geeigneter Weise zusammenfaßt. Für den schon vorher besprochenen Fall, daß der Balken zwei Einzellasten P_1 und P_2 trägt, kann man nämlich die drei dort aufgestellten Ausdrücke für die Biegungsmomente M_{I}, M_{II}, M_{III} in den drei Balkenabschnitten in der einzigen Form

$$M = \underset{\mathrm{I}}{Ax\ ,} - \underset{\mathrm{II}}{P_1(x - p_1)\ ,} - \underset{\mathrm{III}}{P_2(x - p_2)}$$

zur Darstellung bringen. Durch die Bezeichnung I, II, III, die unten beigefügt ist, wird vorgeschrieben, wie weit der Ausdruck zu entwickeln ist, wenn man sich im ersten, zweiten oder dritten Abschnitte der Balkenlänge befindet. Auf die Notwendigkeit, den Ausdruck an der geeigneten Stelle abzubrechen, wird überdies durch das hinter jedes Glied und vor das Vorzeichen des nächsten gesetzte Komma hingewiesen.

Setzen wir diesen Ausdruck in die Differentialgleichung der elastischen Linie ein, so erhalten wir diese ebenfalls sofort für alle drei Äste in der gleichen Art der Zusammenfassung, nämlich

$$E\Theta \frac{d^2y}{dx^2} = \underset{\mathrm{I}}{-Ax\ ,} + \underset{\mathrm{II}}{P_1(x - p_1)\ ,} + \underset{\mathrm{III}}{P_2(x - p_2)}.$$

Integrieren wir diese Gleichung einmal, so finden wir

$$E\Theta\frac{dy}{dx} = C - A\frac{x^2}{2}\underset{\mathrm{I}}{,} + P_1\frac{(x-p_1)^2}{2}\underset{\mathrm{II}}{,} + P_2\frac{(x-p_2)^2}{2}\underset{\mathrm{III}}{.}$$

Hierbei bedeutet C eine Integrationskonstante. Eigentlich wäre für jeden Ast eine besondere willkürliche Integrationskonstante anzunehmen gewesen. Wenn wir aber, wie es bereits durch die Art der Anschreibung ausgedrückt wird, C als den gleichen Wert für alle drei Äste betrachten, so sind damit zwei willkürliche Integrationskonstanten bereits so bestimmt, daß die drei Äste der elastischen Linie sich ohne Knick aneinander schließen. In der Tat erkennen wir nämlich, daß mit dieser Verfügung über die Integrationskonstanten an den Grenzen der Gebiete I und II und II und III keine sprungweise Änderung von $\frac{dy}{dx}$ vorkommt. Sobald wir das Gebiet I verlassen und in das Gebiet II eintreten, haben wir zwar noch ein neues Glied in der Gleichung zu berücksichtigen. An der Stelle $x = p_1$, also an der Grenze selbst, wird dies Glied aber zu Null und es ist daher gleichgültig, ob wir die Grenzstelle noch zum Gebiete I oder schon zum Gebiete II rechnen; an dem Werte von $\frac{dy}{dx}$ wird dadurch nichts geändert und die vorgeschriebene Grenzbedingung ist erfüllt. Auf diesem Umstande, daß sich die Integrationskonstanten ohne weiteres von selbst den Grenzbedingungen anpassen, beruht der Vorteil des Verfahrens.

Eine zweite Integration liefert

$$E\Theta y = Cx + C_1 - A\frac{x^3}{6}\underset{\mathrm{I}}{,} + P_1\frac{(x-p_1)^3}{6}\underset{\mathrm{II}}{,} + P_2\frac{(x-p_2)^3}{6}\underset{\mathrm{III}}{}$$

und auch hier tritt nur eine, für alle Äste gemeinsame, neue Integrationskonstante C_1 hinzu, während zugleich an den Grenzen die Bedingungen erfüllt sind, daß sich y nicht sprungweise ändern kann. Die weitere Behandlung der Gleichung und die Ermittelung der beiden Integrationskonstanten C und C_1 aus den Bedingungen an den Enden des ganzen Balkens

kann nun genau so erfolgen, als wenn es sich um eine elastische Linie mit nur einem einzigen Aste handelte.

Besser freilich als die Rechnung eignet sich in solchen Fällen das graphische Verfahren zur Ermittelung der Gestalt der elastischen Linie, worüber man im II. Bande näheres finden wird.

Ähnlich liegt der Fall, wenn der Balken zwar nur eine stetig verteilte Belastung oder eine einzige Last in der Mitte trägt, der Querschnitt aber nicht konstant ist, sondern in verschiedenen Absätzen wechselt, wie es z. B. bei Blechbalken vorkommt, deren Querschnitt nach der Mitte zu durch Aufnieten von Gurtungsplatten verstärkt wird. Auch dann setzt sich die elastische Linie aus einer Anzahl verschiedener Äste zusammen. Verändert sich der Querschnitt stetig, so ist Θ als Funktion von x in die Differentialgleichung einzusetzen. Insofern die Ausführung der Integration dadurch nicht erschwert oder unmöglich gemacht wird, erleidet das Verfahren hierdurch keine Änderung.

Die vorausgehenden Rechnungen beruhen auf der stillschweigenden Voraussetzung, daß die Kraftebene durch eine Hauptachse des Querschnitts geht. Trifft dies nicht zu, so hat man die Lasten, wie in § 20, in Komponenten nach den Richtungen der Hauptachsen zu zerlegen und die Biegungslinie für die Komponenten in beiden Ebenen zu ermitteln. Die gesamte Formänderung ergibt sich durch geometrische Summierung der zu diesen beiden Komponentensystemen gehörigen elastischen Verschiebungen.

§ 28. **Einfluß der Schubspannungen auf die Biegungslinie.**

Bei den vorausgehenden Betrachtungen ist noch keine Rücksicht auf die Formänderungen genommen, die durch die Schubspannungen bewirkt werden. Diese haben zur Folge, daß der Biegungspfeil noch etwas vergrößert wird und daß überhaupt die elastische Linie von der vorher berechneten Gestalt ein wenig abweicht.

In Abb. 30 ist ein Längenelement des Balkens gezeichnet. Wenn sich die Scherkraft V gleichmäßig über den Querschnitt verteilte, hätte sie zur Folge, daß sich der ursprünglich rechte Winkel zwischen dem Querschnitte und der Stabachse um einen kleinen Betrag γ' änderte, der nach dem Elastizitätsgesetze leicht berechnet werden kann. Man hat nämlich für den durchschnittlichen Betrag τ_m der Schubspannung

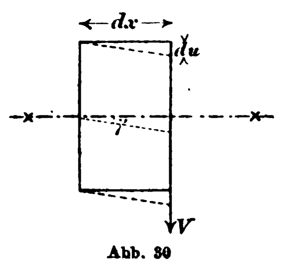


Abb. 30

$$\tau_m = \frac{V}{F}$$

und nach Gl. (31)

$$\gamma' = \frac{\tau_m}{G} = \frac{V}{GF}.$$

Die Winkeländerung γ' bewirkt eine Parallelverschiebung der beiden Querschnitte gegeneinander, die mit du' bezeichnet werden mag; man findet dafür

$$du' = \gamma' dx = \frac{V dx}{GF}.$$

So einfach liegt die Sache in Wirklichkeit aber nicht. Die Schubspannungen verteilen sich nach einem anderen Gesetze über den Balkenquerschnitt, das in § 23 festgestellt wurde. In der Mitte wurden die Schubspannungen größer als der vorher berechnete Durchschnittsbetrag τ_m gefunden, während sie nach der oberen und der unteren Kante hin bis auf Null abnehmen. Infolge davon wird auch die Winkeländerung γ zwischen der Stabachse und dem Balkenquerschnitte in der Mitte größer, während der Winkel an den Kanten ungeändert bleibt. Man erkennt daraus nebenbei, daß die Bernoullische Annahme, die Querschnitte blieben bei der Formänderung eben, nicht streng erfüllt sein kann. In der Tat ist auch schon im vorhergehenden diese Annahme nur als näherungsweise richtig vorausgesetzt worden.

Hier handelt es sich besonders um den Höhenunterschied aufeinander folgender Punkte der Stabachse, der auf Rechnung

der Schubspannungen zu setzen ist. Wir bezeichnen diesen mit du und setzen

$$du = \varkappa du' = \varkappa \frac{V dx}{GF}. \tag{83}$$

Unter $\varkappa$ ist dann eine Verhältniszahl zu verstehen, die nach den vorausgehenden Bemerkungen jedenfalls größer als 1 ist. Der genaue Wert von $\varkappa$ hängt von der Gestalt des Querschnitts ab, da durch diese die Verteilung der Schubspannungen und hiermit das Verhältnis zwischen dem Werte von τ in der Mitte und dem Durchschnittswerte τ_m bedingt ist. Es wäre indessen nicht zulässig, $\varkappa$ unmittelbar gleich dem zuletzt genannten Verhältnisse zu setzen, denn die Verschiebungen du verschiedener Fasern, die in verschiedenen Abständen von der Nulllinie liegen, können nicht unabhängig voneinander erfolgen, weil sonst eine Zerrung in der Richtung der Höhe des Querschnitts zustande käme. In der Tat ist der Vorgang durch die Querschnittskrümmung, die notwendig auftreten muß, ziemlich verwickelt. Man hilft sich daher damit, den Wert von $\varkappa$ auf Grund einer Betrachtung zu ermitteln, die sich auf den Begriff der Formänderungsarbeit stützt. Es kommt dies darauf hinaus, daß man einen Durchschnittswert du für alle Fasern berechnet. Strenger begründen läßt sich dieses Verfahren freilich nicht; es bildet mehr eine Abschätzung als eine genaue Berechnung. Da es sich hierbei nur um einen an sich geringfügigen Verbesserungswert handelt, läßt sich aber gegen seine Benutzung nichts einwenden.

Für den Fall der reinen Schubspannung ist die spezifische Formänderungsarbeit nach Gl. (42) gleich $\frac{\tau^2}{2G}$. Für das Balkenelement von der Länge dx ist daher die Formänderungsarbeit gleich

$$dx \int \frac{\tau^2}{2G} dF$$

zu setzen, wobei die Integration über den ganzen Querschnitt zu erstrecken ist.

In diesem Ausdrucke kann für τ der in Gl. (72) auf-

gestellte Wert eingesetzt werden. Der so ermittelten Formänderungsarbeit ist die von der Scherkraft V (die für das Balkenelement eine äußere Kraft bildet) geleistete Arbeit $\frac{1}{2} V du$ gleich zu setzen. Man erhält dadurch

$$dx \int \frac{\tau^2}{2G} dF = \tfrac{1}{2} V du = \tfrac{1}{2} V \varkappa du' = \varkappa \frac{V^2}{2GF} dx$$

und hiermit

$$\varkappa = \frac{F \int \tau^2 dF}{V^2}. \tag{84}$$

Für den rechteckigen Querschnitt soll die Rechnung zu Ende geführt werden. In § 23 war dafür

$$\tau = \frac{V}{\Theta} \left(\frac{h^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right)$$

gefunden, wobei zur Vermeidung von Mißverständnissen hier z an Stelle des dort mit u bezeichneten Abstandes der betreffenden Faser von der Nulllinie gesetzt ist. Mit $\Theta = \frac{bh^3}{12}$ wird dies

$$\tau = \frac{V}{bh^3} \left(\tfrac{3}{2} h^2 - 6 z^2 \right)$$

und daher

$$\int \tau^2 dF = \frac{V^2}{b^2 h^6} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left(\tfrac{3}{2} h^2 - 6 z^2 \right)^2 b\, dz.$$

Nach Ausführung der Integration erhält man

$$\int \tau^2 dF = \frac{6}{5} \frac{V^2}{bh}.$$

Setzt man dies in Gl. (84) ein und beachtet, daß $F = bh$ ist, so erhält man für den rechteckigen Querschnitt

$$\varkappa = \tfrac{6}{5} = 1{,}2.$$

Es möge noch bemerkt werden, daß die Berechnung von $\varkappa$ nach Gl. (84) immer leicht durchgeführt werden kann, auch wenn sich die Integration nach den gewöhnlichen Methoden

nicht vornehmen läßt, indem man den Querschnitt in schmale Streifen zerlegt und an die Stelle der Integration eine Summierung treten läßt. Das Resultat dieser mechanischen Quadratur wird immer genau genug, auch wenn man eine Einteilung in nur wenige Streifen vornimmt.

Für die besonders häufig verwendeten gewalzten Eisenträger von dem I-Profile hat man $\varkappa$ ein für alle Male berechnet. Für den I-Träger Nr. 8 (d h. von 8 cm Höhe) wurde $\varkappa = 2{,}4$, für den höchsten Träger, der noch verwendet zu werden pflegt, Nr. 50 $\varkappa = 2{,}0$ gefunden. Für die dazwischen liegenden Trägerhöhen ändert sich $\varkappa$ allmählich von dem einen zu dem anderen dieser Werte. Größer als bei den I-Trägern wird $\varkappa$ nicht leicht bei einer anderen Querschnittsgestalt.

Bei den jetzt durchgeführten Rechnungen ist nur auf den Einfluß von V auf die Biegungslinie geachtet worden, d. h. M wurde bei dem betrachteten Balkenelemente als Null vorausgesetzt. Wirken M und V gleichzeitig ein, so summieren sich die Wirkungen von beiden. An irgend einer Stelle im Abstande x vom linken Auflager hat man daher die gesamte Durchsenkung y'

$$y' = y + \int_0^x du, \tag{85}$$

wenn unter y die im vorigen Paragraphen berechnete Einsenkung verstanden wird. Das letzte Glied in diesem Ausdrucke ist indessen gewöhnlich klein gegen das erste und es genügt daher meistens $y' = y$ zu setzen, den Einfluß der Schubspannungen also zu vernachlässigen. Nur bei kurzen Stäben von großem Querschnitte, bei denen, wie wir schon früher fanden, die Schubspannungen überhaupt mehr hervortreten, oder für Stellen, die den Balkenenden benachbart sind, wird es nötig, das zweite Glied in Gl. (85) zu berücksichtigen. Um uns davon zu überzeugen, betrachten wir noch als Beispiel einen beiderseits frei aufliegenden Balken von konstantem rechteckigen Querschnitte, der eine Einzellast in der

Mitte trägt. Der Biegungspfeil f war dafür im vorigen Paragraphen in Gl. (82) zu

$$f = \frac{Pl^3}{48 E \Theta} = \frac{Pl^3}{4 E b h^3}$$

berechnet. Für du hat man hier nach Gl. (83) mit $\varkappa = 1{,}2$ $V = \frac{P}{2}$ und $F = bh$

$$du = 0{,}6 \frac{P dx}{G b h}$$

und daher

$$\int_0^{\frac{l}{2}} du = 0{,}3 \frac{Pl}{G b h}.$$

Für den mit Rücksicht auf den Einfluß der Schubspannungen verbesserten Wert f' des Biegungspfeiles findet man also nach Gl. (85)

$$f' = \frac{Pl^3}{4 E b h^3} + 0{,}3 \frac{Pl}{G b h} = \frac{Pl}{4 E b h}\left(\frac{l^2}{h^2} + 3\right). \qquad (86)$$

Bei der letzten Umformung ist $G = 0{,}4\,E$ gesetzt, also vorausgesetzt, daß für den Stoff, aus dem der Balken besteht, die Verhältniszahl $m = 4$ sei. Nimmt man an, daß die Spannweite l etwa zehnmal so groß sei, als die Balkenhöhe h, so macht das zweite Glied in der Klammer, das vom Einflusse der Schubspannungen herrührt, nur 3% von dem ersten aus. Gewöhnlich ist das Verhältnis $\frac{l}{h}$ noch größer als 10, und das von den Schubspannungen herrührende Glied macht dann einen noch kleineren Bruchteil des anderen aus. Mit dem Verhältnisse $\frac{l}{h} = 5$ steigt indessen der Bruchteil auf 12% und von da an wird es nötig, die genauere Formel (86) an Stelle von Gl. (82) zur Berechnung des Biegungspfeiles zu verwenden.

§ 29. Durchlaufende Träger.

Für einen Balken, der über mehrere Öffnungen hinwegreicht, kann man, wie schon früher hervorgehoben wurde, die Auflagerkräfte nur auf Grund der elastischen Formänderungen,

die er erfährt, berechnen. Wenn die Auflagerkräfte bereits bekannt wären, würde sich die Berechnung der Spannungen genau so wie bei dem Träger über einer einzigen Spannweite ausführen lassen. Man könnte ohne weiteres für jeden Querschnitt das Biegungsmoment und die Scherkraft angeben und die Spannungen daraus nach den bereits dafür aufgestellten Formeln finden. Es handelt sich also in der Tat nur noch darum, zu zeigen, wie man die Auflagerkräfte oder überhaupt die statisch unbestimmten Größen, die auch in anderer Weise gewählt werden können, berechnen kann.

Man nehme zunächst an, daß der Träger über zwei Öffnungen von gleicher Größe l hinwegreicht und eine gleichmäßig verteilte Last q auf die Längeneinheit trägt. Wenn die Mittelstütze entfernt wäre, würde sich die Trägermitte um den in Gl. (79) angegebenen Betrag durchbiegen, wobei nur $2l$ an Stelle von l zu setzen ist. Auf den Einfluß der Schubspannungen braucht man in der Regel keine Rücksicht zu nehmen; wenn es gewünscht werden sollte, kann dies aber nach dem im vorigen Paragraphen angegebenen Verfahren leicht geschehen.

Hierauf denke man sich an dem Balken in der Mitte eine nach aufwärts gerichtete Kraft angebracht. Dadurch wird die Balkenmitte wieder gehoben und zwar um den in Gl. (82) festgestellten Betrag, wenn an Stelle von l wieder $2l$ gesetzt und unter P die Größe der aufwärts gerichteten Kraft verstanden wird. Wenn wir P so bestimmen, daß die vorher erlittene Durchbiegung in der Mitte gerade wieder rückgängig gemacht wird, erhalten wir damit die Größe des Auflagerdrucks an der Mittelstütze, denn nur bei diesem Werte des Auflagerdrucks kann die elastische Linie des ganzen Stabes durch den vorgeschriebenen Punkt gehen. Die Gleichsetzung der Werte von f in Gl. (79) und Gl. (82) liefert

$$P = \tfrac{5}{8} \cdot 2ql = \tfrac{5}{8} Q,$$

wenn jetzt Q die über beide Öffnungen verteilte Last bedeutet. Man sieht daraus, daß der durchlaufende Träger einen

größeren Teil der ganzen Last auf die Mittelstütze überträgt, als zwei getrennte Träger, von denen jeder eine der beiden Öffnungen überdecken würde, denn in diesem Falle käme auf die Mittelstütze $\frac{Q}{2}$ und auf jede Endstütze $\frac{Q}{4}$. Der Auflagerdruck des durchlaufenden Trägers an jedem Ende stellt sich auf $\frac{1}{2}(Q - \frac{5}{8}Q) = \frac{3}{16}Q$.

Diese Betrachtung setzt voraus, daß alle drei Stützen genau in gleicher Höhe liegen und daß sie auch unter dem Einflusse der Belastung nicht nachgeben, selbstverständlich auch, daß der Träger vorher genau geradlinig war. Senkt sich etwa die Mittelstütze um den Betrag δ oder mußte sich der Träger schon vorher in der Mitte um δ durchbiegen, ehe er die Mittelstütze erreichte, so findet man den Auflagerdruck P aus der Gleichung

$$\frac{5}{384} \cdot \frac{Q(2l)^3}{E\Theta} = \delta + \frac{P(2l)^3}{48 E\Theta},$$

also

$$P = \frac{5}{8}Q - \delta \frac{6E\Theta}{l^3}.$$

Wenn die Mittelstütze zu hoch lag, ist hierin δ negativ zu setzen.

Man sieht leicht ein, daß dasselbe Verfahren auch noch anwendbar bleibt, wenn die Öffnungen von verschiedener Größe sind. Man braucht dann nur an die Stelle von f die für irgend eine andere Abszisse x gültigen Werte von y aus § 27 einzusetzen. Auch für Träger, die über mehr als zwei Öffnungen hinwegreichen, läßt sich die Berechnung der Auflagerkräfte in derselben Weise durchführen; bei drei Öffnungen hat man zwei nach aufwärts gerichtete unbekannte Kräfte an den Mittelstützen anzunehmen, die sich aus den beiden Bedingungen berechnen, daß die elastischen Verschiebungen der zugehörigen Angriffspunkte im ganzen verschwinden müssen. Auf die Berechnung der durchlaufenden Träger wird im übrigen hier nicht ausführlicher eingegangen, da sie besser der graphischen Statik vorbehalten bleibt.

§ 30. Der auf beiden Seiten eingespannte Träger.

Ein Träger sei an den Auflagern so gestützt, daß jede Drehung des Stabendes unmöglich gemacht ist. Die elastische Linie hat dann horizontale Tangenten an den Stabenden und man erkennt daraus schon, daß sie zwei Wendepunkte haben muß, zwischen denen sie, wie beim frei aufliegenden Träger, hohl nach oben hin gekrümmt ist, während sie zwischen einem Wendepunkte und dem benachbarten Auflager ihre Hohlseite nach unten kehrt. In den Wendepunkten ist die Krümmung Null, daher muß dort auch das Biegungsmoment M verschwinden.

Eine Einzelkraft würde nicht ausreichen, das Ende des Trägers gegen eine Drehung schützen zu können. Außer einem Auflagerdrucke muß daher an jedem Trägerende noch ein Kräftepaar von der Stütze her übertragen werden. Das Moment dieses Kräftepaares am linken Auflager sei mit M_0 bezeichnet, denn es stellt zugleich das Biegungsmoment für einen Querschnitt dar, der unmittelbar in der Nähe des Auflagers gezogen ist. Wenn wir der Einfachheit halber voraussetzen, daß der Balken eine gleichmäßig verteilte Last trägt, ist M für irgend einen anderen Querschnitt mit der Abszisse x

$$M = M_0 + Ax - \frac{qx^2}{2}.$$

Die Differentialgleichung der elastischen Linie geht damit über in

$$E\Theta \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{qx^2}{2} - Ax - M_0.$$

Für den Auflagerdruck A kann in unserem Falle auch noch $\frac{ql}{2}$ gesetzt werden. Eine einmalige Integration liefert

$$E\Theta \frac{dy}{dx} = \frac{qx^3}{6} - A\frac{x^2}{2} - M_0 x + C.$$

Die Integrationskonstante C muß aber hier verschwinden, weil $\frac{dy}{dx} = 0$ für $x = 0$ bleibt. Auch für $x = l$ muß der

Ausdruck verschwinden, da der Balken auch am rechten Ende eingemauert sein sollte. Dies liefert die Bedingungsgleichung

$$0 = \frac{ql^3}{6} - \frac{ql}{2} \cdot \frac{l^2}{2} - M_0 l,$$

woraus

$$M_0 = -\frac{ql^2}{12}$$

folgt. Das größte positive Biegungsmoment in der Mitte wird gleich $\frac{ql^2}{24}$; die größte Bruchgefahr ist also an den Auflagerstellen vorhanden. — Ähnliche Betrachtungen lassen sich auch für den durchlaufenden Träger anstellen.

Natürlich kann man auch hier auf den Einfluß der Schubspannungen Rücksicht nehmen; es lohnt sich aber nicht, näher darauf einzugehen, da alle diese Rechnungen bei der Anwendung mit einer großen Unsicherheit behaftet sind. Man kann sich niemals sicher darauf verlassen, daß der Träger wirklich so gut eingespannt sei, daß jede Drehung des Stabendes ausgeschlossen wäre. Das wirkliche Verhalten der Stabenden kann vielmehr von dem bei der Rechnung vorausgesetzten weit abweichen und es würde nur ein irrtümliches Gefühl der Sicherheit erwecken, wenn man sich unter solchen Umständen mit der Berechnung kleiner Korrektionsgrößen befassen wollte, die gegenüber den zu erwartenden Fehlern des Hauptwertes kaum in Betracht kommen.

§ 31. Vergleich der Biegungslehre mit der Erfahrung.

Zur Prüfung der in diesem Abschnitte entwickelten Formeln hat man schon gar viele Belastungsversuche vorgenommen. Unter der selbstverständlichen Voraussetzung, daß dabei die Elastizitätsgrenze nicht überschritten werden darf, stimmen die Versuchsergebnisse hinsichtlich der Formänderung der dem Versuche unterworfenen Probekörper meist recht gut mit den theoretischen Folgerungen überein. Auf die Formänderungen, die nach Überschreiten dieser Grenze eintreten, bezieht sich dagegen die Theorie nicht und man kann daher auch nicht

erwarten, daß darüber hinaus eine Übereinstimmung der Formeln mit der Erfahrung bestehe.

Aus demselben Grunde kann auch keine unmittelbare Bestätigung der für die Spannungen aufgestellten Formeln durch einen Belastungsversuch, der bis zum Bruche hin fortgesetzt wird, erwartet werden. Vor dem Bruche treten bei den meisten Körpern größere bleibende Formänderungen ein, die mit den Spannungen in einem ganz anderen Zusammenhange stehen, als die elastischen Formänderungen bei kleineren Lasten. Hierdurch wird die Spannungsverteilung über den Querschnitt erheblich geändert und zwar derart, daß die Spannungen von der äußeren Kante aus nicht mehr proportional mit den Abständen von der Nulllinie abnehmen, sondern — namentlich in der Nähe der Kante, wo die Überschreitung der Elastizitätsgrenze zuerst stattfindet — erheblich langsamer. Dies hat zur Folge, daß bei einem gegebenen Werte der Kantenspannung das Moment des aus den Zug- und Druckspannungen gebildeten Kräftepaares einen größeren Wert annimmt, als wenn sich die Spannungen nach dem Geradliniengesetze verteilten. Der Stab vermag daher etwas größeren Lasten zu widerstehen, als nach den unter Voraussetzung des Geradliniengesetzes abgeleiteten Formeln zu schließen wäre. Das bestätigt auch in der Tat die Erfahrung.

Für die Festigkeitsberechnungen, die man einer Bau- oder Maschinenkonstruktion zu Grunde legt, kommt aber der hier besprochene Umstand nicht in Betracht, weil es sich dabei nicht nur um die Vermeidung eines Bruches, sondern auch um die Verhütung einer merklichen bleibenden Verbiegung handelt.

Beim Gußeisen sind die dem Bruche vorausgehenden bleibenden Formänderungen zwar nur sehr gering; immerhin dürften sie auch hier zu einer Abänderung der Spannungsverteilung vor dem Bruche und damit zu einer Erhöhung der Bruchlast nicht unwesentlich beitragen. Zugleich kommt hier noch der andere Umstand zur Geltung, daß das Gußeisen auch schon innerhalb der Elastizitätsgrenze dem Proportionalitätsgesetze nicht gehorcht. Die Spannungsverteilung weicht daher

schon von Anfang an von der geradlinigen ab und fällt ungefähr so aus, wie es Abb. 31 zeigt. Unter der wenigstens näherungsweise zutreffenden Annahme, daß die Querschnitte bei der Biegung eben bleiben, tritt nämlich an die Stelle der geradlinigen Begrenzung des Spannungsdiagramms die Dehnungskurve, die für Gußeisen ganz ähnlich aussieht, wie sie in Abb. 10 und 11, S. 47 für Granit und Sandstein gezeichnet ist.

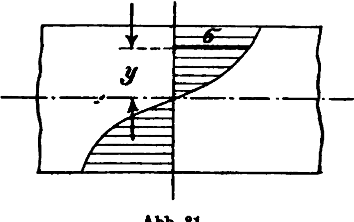


Abb. 31.

Da die Dehnungskurve auf der Zugseite anders verläuft, als auf der Druckseite, kann man auch nicht mehr erwarten, daß die Nulllinie mit einer Schwerlinie des Querschnitts zusammenfalle. Sie wird sich vielmehr ein wenig nach der Zugseite hin verschieben, wodurch ebenfalls eine Verminderung der Kantenspannung auf der Zugseite, von der die Bruchgefahr abhängt, herbeigeführt wird. Unmittelbare Messungen, die ich an gebogenen Gußeisenstäben angestellt habe, ließen in der Tat eine, freilich nur recht geringe Verschiebung der Nulllinie nach der Zugseite hin erkennen.

Berechnet man aus der beobachteten Bruchlast eines auf Biegung beanspruchten Gußeisenbalkens die Kantenspannung auf der Zugseite nach der einfachen Formel, Gl. (46), so findet man sie gewöhnlich ungefähr doppelt so groß wie die durch einen Zugversuch mit derselben Gußeisensorte ermittelte Zugfestigkeit. Zum Teile erklärt sich der Widerspruch zwischen diesen Werten durch die zuvor erörterten Umstände. Es kommt dabei aber auch noch ein anderer Umstand in Betracht. Gußeisen ist nämlich ein ziemlich unzuverlässiges Material, in dem öfters kleine Fehler, Schlackeneinschlüsse u. dgl. vorkommen, die die Festigkeit herabsetzen. Ein Zugstab, der auf die ganze Länge hin der gleichen Beanspruchung unterworfen ist, bricht, wenn ein solcher, wenn auch nur ganz kleiner Fehler vorkommt, an der schwächsten Stelle, während die Fehlstelle bei einem auf Biegung beanspruchten Balken nur dann

von Einfluß ist, wenn sie sich zufällig in der Nähe der stärkst beanspruchten Stelle findet. Auch dieser Umstand trägt dazu bei, daß der Zugversuch im Mittel einen kleineren Festigkeitswert liefert, als der Biegungsversuch.

Steine sind noch weit spröder als Gußeisen. Bei ihnen kann sich daher eine Verzerrung des Spannungsverteilungsdiagramms durch die dem Bruche vorausgehenden bleibenden Längenänderungen weniger bemerklich machen, als beim Gußeisen. Dafür ist es aber bei Steinen noch weit schwieriger, den wahren Wert der Zugfestigkeit durch einen Zugversuch zu ermitteln, als für Gußeisen, weil es kaum gelingt, bei einem Zugstabe aus Stein eine gleichförmige Verteilung der Spannungen über den Querschnitt herbeizuführen. Angaben über die Zugfestigkeit von Steinen sind daher, wenn sie aus Zugversuchen abgeleitet wurden, immer mit Mißtrauen aufzufassen. Zuverlässiger ist hier der aus einem Biegungsversuche auf Grund der gewöhnlichen Formel hergeleitete Wert der Kantenspannung, obschon er aus den zuvor besprochenen Gründen immer etwas größer ausfällt, als der wahre Wert der Zugfestigkeit.

Aufgaben.

11. *Aufgabe. Man soll die Zentralellipse für ein gleichschenkliges Winkeleisenprofil von 70 mm Schenkellänge und 10 mm Schenkelstärke konstruieren* (Abb. 32).

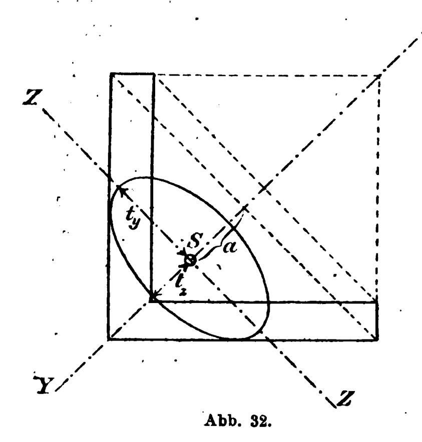


Abb. 32.

Lösung. Eine Hauptachse des Querschnitts ist die Symmetrieachse YY. Das zugehörige Trägheitsmoment Θ_y ist

$$\Theta_y = \frac{7^4}{12} - \frac{6^4}{12} = 92{,}1 \text{ cm}^4,$$

da sich der Querschnitt als Differenz zweier Quadrate ansehen läßt, für die beide YY eine Schwerpunktsachse ist. Den Abstand a des Schwerpunkts S von der Diagonale des umschriebenen Quadrats findet man aus der Momentengleichung

$$a \cdot 13 = 7{,}07 \cdot 36,$$

also

$$a = 19{,}6 \text{ mm}.$$

Auch das Trägheitsmoment Θ_z setzt man aus den Trägheitsmomenten der beiden Quadrate zusammen, wobei aber darauf zu achten ist, daß die Achse ZZ nicht durch die Schwerpunkte dieser beiden Quadrate geht. Man hat

$$\Theta_z = \frac{7^4}{12} + 7^2 \cdot 1{,}96^2 - \left(\frac{6^4}{12} + 6^2 \cdot 2{,}67^2\right) = 23{,}7 \text{ cm}^4.$$

Für die Trägheitsradien folgt hieraus

$$i_y = \sqrt{\frac{92{,}1}{12}} = 2{,}66 \text{ cm}; \quad i_z = \sqrt{\frac{23{,}7}{13}} = 1{,}35 \text{ cm}.$$

Man trägt die Trägheitsradien auf den Hauptachsen ab und konstruiert die hierdurch bestimmte Ellipse.

12. Aufgabe. Für das Z-Eisen N. P. 16 findet man im deutschen Normalprofilbuche für die Hauptachsen YY und ZZ angegeben

$$\operatorname{tg} \alpha = 0{,}39; \quad \Theta_z = 1193 \text{ cm}^4; \quad \Theta_y = 58{,}8 \text{ cm}^4.$$

Die Maße sind aus der Abb. 33 zu entnehmen. Ein Balken von diesem Querschnitte ist am einen Ende eingemauert (so, daß der Steg aufrecht steht, in derselben Lage wie in der Abbildung) und trägt an dem um 1,20 m vorkragenden Ende eine Last von 500 kg. Wie groß wird die größte Spannung σ, wenn das freie Ende des Balkens an kleinen horizontalen Ausbiegungen nicht verhindert wird?

Lösung. Aus $\operatorname{tg} \alpha = 0{,}39$ folgt $\alpha = 21^0 20'$; $\sin \alpha = 0{,}36$; $\cos \alpha = 0{,}93$. Das Biegungsmoment an der Einmauerung hat die Größe $500 \times 120 = 60\,000$ cmkg; wir zerlegen es in die Komponenten $60\,000 \times 0{,}93 = 55\,800$ und $60\,000 \times 0{,}36 = 21\,600$ in den Richtungen der Hauptachsen. Zur ersten Komponente gehört die neutrale Achse ZZ, und die zugehörigen Spannungen σ_{I} sind

$$\sigma_{\text{I}} = \frac{55\,800}{1193} \cdot y = 46{,}8 y, \quad \text{ebenso} \quad \sigma_{\text{II}} = \frac{21\,600}{58{,}8} \cdot z = 367 z.$$

Die in irgend einem Flächenelemente des Querschnitts mit den Koordinaten y und z im ganzen auftretende Spannung σ ist daher

$$\sigma = \sigma_{\text{I}} + \sigma_{\text{II}} = 46{,}8 y + 367 z.$$

Dabei ist die positive Y-Achse nach oben, die positive Richtung der Z-Achse nach rechts hin zu nehmen; y und z sind, wie alle übrigen Maße, in cm auszudrücken, man erhält dann σ in atm.

An der Kante A ist $y = 7{,}32$ und $z = 3{,}29$ cm, man hat daher

$$\sigma = 46{,}8 \times 7{,}32 + 367 \times 3{,}29 = 1550 \text{ atm.}$$

An der Kante B sind σ_{I} und σ_{II} von verschiedenem Vorzeichen und

$$\sigma = 46{,}8 \times 9{,}85 - 367 \times 3{,}48 = -818 \text{ atm.}$$

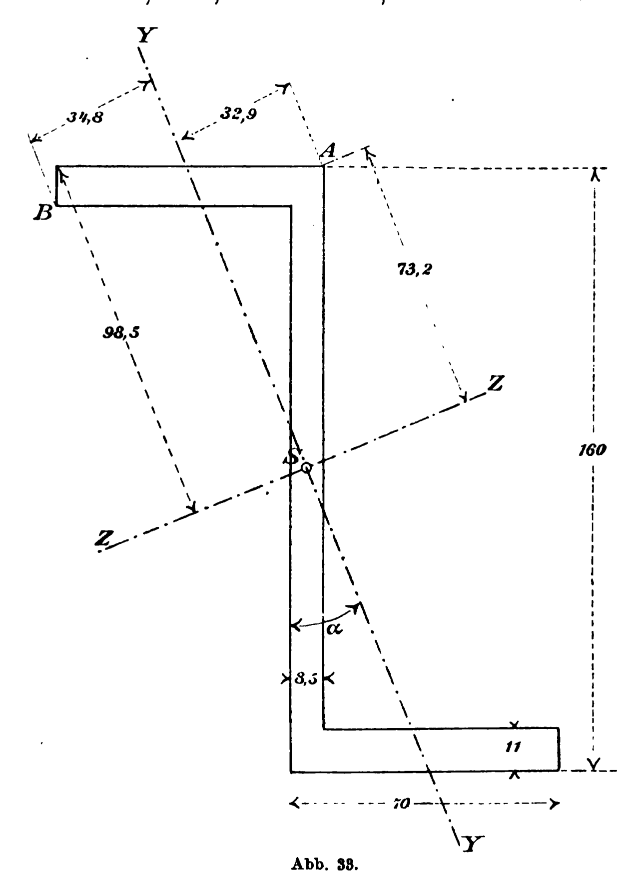


Abb. 33.

Die größte Spannung tritt daher an der Kante A auf und ist gleich 1550 atm, das Material ist also an dieser gefährlichsten Stelle bis etwa zur Elastizitätsgrenze beansprucht.

Die elastische Verschiebung des freien Balkenendes unter der senkrecht gerichteten Belastung erfolgt in schräger Richtung. Wird

das Balkenende dagegen so gestüzt, daß es sich nur in lotrechter Richtung bewegen kann, so tritt noch eine horizontale Kraft auf, die von der Stütze auf das Balkenende übertragen wird. In diesem Falle ist die Nulllinie horizontal gerichtet und man erhält die Spannung σ aus der gewöhlichen Biegungsformel, wenn darin das Trägheitsmoment auf die horizontale Achse bezogen wird.

Anmerkung. Die Folgerungen der Theorie für die horizontalen und vertikalen Verschiebungskomponenten eines in der angegebenen Weise eingespannten und belasteten Z-Trägers habe ich durch einen Versuch geprüft, den ich bei den Übungen in meinem Laboratorium regelmäßig zu wiederholen pflege. Die Übereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung ist ganz befriedigend.

13. *Aufgabe. Den Querschnittskern für die in den beiden vorigen Aufgaben vorkommenden beiden Profile zu konstruieren.*

Lösung. Bei dem Winkeleisenprofile kann man fünf Linien zeichnen, die mit dem Umfange mindestens zwei Punkte gemeinsam haben und die Fläche nicht durchkreuzen. Von diesen fallen vier mit den nach außen gekehrten Umfangsseiten zusammen und die fünfte ist die parallel zur ZZ-Achse gezogene Verbindungslinie der beiden nach rechts oben gekehrten Ecken. Alle übrigen Strahlen des den Querschnitt einhüllenden Tangentenbüschels gehen aus diesen Hauptlagen durch Drehung um eine der Ecken des Querschnitts hervor. Daraus folgt, daß der Kern ein Fünfeck bildet, dessen Ecken die Antipole jener fünf Geraden und dessen Seiten die Antipolaren der genannten Querschnittsecken sind. In Abb. 34 ist der Querschnitt mit der Zentralellipse und dem durch Schraffierung hervorgehobenen Kerne gezeichnet. Ganz ähnlich findet man auch den in Abb. 35 angegebenen Kern des Z-Profils, für das man die Zentralellipse nach den Angaben über die Trägheitsmomente ohne weiteres auftragen kann.

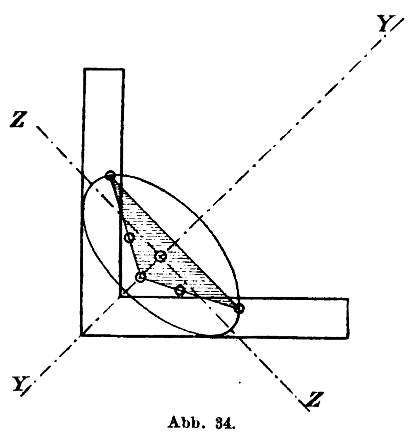


Abb. 34.

14. *Aufgabe. Zentralellipse und Querschnittskern für eine hohle gußeiserne Säule von 20 cm äußerem Durchmesser und 2 cm Wandstärke zu bestimmen.*

Lösung. Das Trägheitsmoment des ringförmigen Querschnitts für eine Schwerpunktsachse ist

$$\Theta = \frac{\pi}{4}(10^4 - 8^4) = 4635 \text{ cm}^4$$

und die Querschnittsfläche $F = 113$ cm², woraus

$$i = \sqrt{\frac{4635}{113}} = 6{,}40 \text{ cm}$$

folgt. Die Zentralellipse ist ein Kreis von diesem Radius. Auch der Querschnittskern wird hier durch einen Kreis begrenzt, dessen Radius k aus der Proportion

$$\frac{k}{6{,}4} = \frac{6{,}4}{10},$$

also $k = 4{,}1$ cm

folgt.

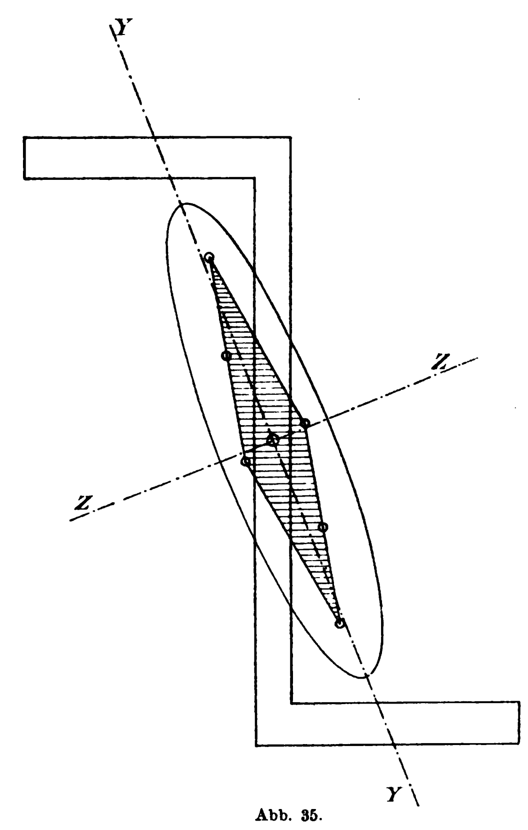


Abb. 35.

15. *Aufgabe. Ein Balken (oder eine Tragachse, wie man solche Stäbe im Maschinenbaue zu nennen pflegt), der an beiden Enden gestützt ist und eine Einzellast aufzunehmen hat, soll als Rotationskörper ausgeführt werden, so daß in jedem Querschnitte die zulässige Spannung des Materials erreicht wird. Nach welchem Gesetze muß der Meridianschnitt gekrümmt werden?*

Lösung. Der Auflagerdruck am linken Ende betrage A; dann ist das Biegungsmoment im Abstande x davon $M = Ax$ und die Spannung

$$\sigma = \frac{M}{W} = 4\frac{Ax}{\pi r^3},$$

wenn r der Radius des Querschnittskreises ist. Die Spannung σ

soll in allen Querschnitten gleich groß werden, daher muß auch der Ausdruck auf der rechten Seite unabhängig von x sein und r wird dadurch als Funktion von x bestimmt. Man erhält

$$r = \sqrt[3]{\frac{4Ax}{\pi\sigma}}$$

als Gleichung der Meridiankurve. Man sieht daraus, daß das Längsprofil der Tragachse durch eine kubische Parabel gebildet werden muß, wenn die Tragachse ein Körper von überall gleicher Festigkeit sein soll.

Hierbei ist noch keine Rücksicht auf die Schubspannungen genommen, die in der Nähe der Stützen das Übergewicht über die Normalspannungen erlangen. So würde für $x = 0$ nach der Formel $r = 0$ sein, der Querschnitt an der Stütze also bis auf Null abnehmen können. Das ist natürlich ein Trugschluß, denn der Querschnitt muß überall mindestens noch so groß bleiben, daß die Schubspannungen für sich genommen die zulässige Beanspruchung des Materials nicht überschreiten.

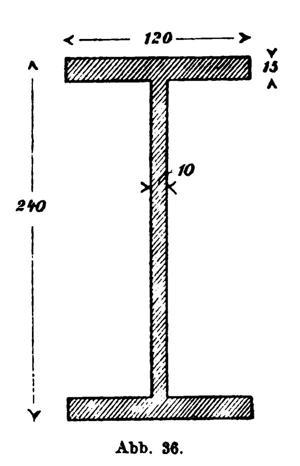


Abb. 36.

16. *Aufgabe. Ein* I-*Balken von beistehendem Querschnitte* (Abb. 36) *ist am einen Ende eingemauert und trägt an dem um 0,8 m vorkragenden Ende eine Belastung von 5000 kg. Man soll die größte Spannung und die Anstrengung des Materials unmittelbar unter dem Flantsche des Einspannungsquerschnitts berechnen.*

Lösung. Das Trägheitsmoment für die horizontale Achse berechnen wir, indem wir uns den Querschnitt durch Wegnahme von zwei Rechtecken aus dem umschriebenen Rechtecke entstanden denken, also

$$\Theta = \frac{12 \cdot 24^3}{12} - 2 \cdot \frac{5,5 \cdot 21^3}{12} = 5335 \text{ cm}^4.$$

Das statische Moment S des Flantschenquerschnitts für die horizontale Schwerpunktsachse ist

$$S = \int_{u}^{\frac{h}{2}} y\,dF = 1,5 \cdot 12 \cdot 11,25 = 202,5 \text{ cm}^3.$$

Für die Normalspannungen σ im Einspannquerschnitte hat man

$$\sigma = \frac{M}{\Theta} y = \frac{5000 \cdot 80}{5335} y = 75 y.$$

Am oberen Rande ist $y = 12$ cm und daher $\sigma = 900$ atm. Dagegen ist unmittelbar unter dem Flantsche $y = 10{,}5$ und $\sigma = 787$ atm. Für diese Stelle berechnen wir auch die Schubspannung τ. Nach Gl. (72) findet man

$$\tau = \frac{VS}{b\Theta} = \frac{5000 \cdot 202{,}5}{1 \cdot 5335} = 190 \text{ atm.}$$

Aus σ und τ ergibt sich die Hauptspannung an dieser Stelle nach Gl. (12)

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_x}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{4\tau^2 + \sigma_x^2} = \frac{787}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{380^2 + 787^2} = 830 \text{ atm.}$$

Die Hauptspannung ist also an dieser Stelle trotz des Hinzutretens von τ noch kleiner als σ an der oberen Kante. Daran wird auch nicht viel geändert, wenn man die reduzierte Spannung, von der die Beanspruchung des Materials abhängt, berechnet. Nach Gl. (37) ist für $m = 3\frac{1}{3}$ die reduzierte Spannung

$$\sigma_{\text{red}} = 0{,}35\,\sigma_x \pm 0{,}65\sqrt{4\tau^2 + \sigma_x^2} = 844 \text{ atm.}$$

Diese Rechnung lehrt, daß man in der Tat auch bei I-Profilen in der Regel nicht nötig hat, die Spannungen an anderen Stellen als an der oberen Kante zu berechnen, also überhaupt nicht nötig hat, auf die Schubspannungen zu achten. Anders wird die Sache indessen, wenn der Hebelarm der Kraft noch kleiner wird, als hier angenommen war. Denn τ behält dann — bei gleicher Belastung — seinen Wert, während σ abnimmt und man kommt dann bald zu einem Hebelarme, bei dem die Beanspruchung des Materials unmittelbar unter dem Flantsche größer wird als an der äußeren Kante.

Schließlich sei nochmals ausdrücklich darauf hingewiesen, daß diese ganze Betrachtung nur einen Anspruch auf ungefähre Gültigkeit machen kann, denn Gl. (72) ist aus einer recht unsicheren Voraussetzung über die Verteilung der Spannungen τ abgeleitet, die gerade an der Stelle unmittelbar unter dem Flantsche des I-Profiles keineswegs genau zutreffen kann. Man sieht aber auch, daß diese Formel in der Tat nur zu einer mehr schätzungsweisen Bestimmung des Ortes der größten Beanspruchung gebraucht wird. Gegen einen solchen Gebrauch läßt sich nichts einwenden.

17. Aufgabe. Die Verteilung der Schubspannungen τ über einen kreisförmigen Querschnitt zu berechnen.

Lösung. Man hat zunächst das statische Moment S des in Abbildung 37 schraffierten Kreisabschnitts zu berechnen. Wegen $z = \sqrt{r^2 - y^2}$ hat man

$$\int y\,dF = 2\int_u^r y\sqrt{r^2 - y^2}\,dy.$$

Allgemein ist aber

$$\int y\sqrt{r^2 - y^2}\,dy = -\tfrac{1}{3}\sqrt{(r^2 - y^2)^3},$$

wovon man sich durch Differentiation leicht überzeugt. Nach Einsetzen der Grenzen wird daher

$$\int y\,dF = \tfrac{2}{3}\sqrt{(r^2 - u^2)^3} = \frac{b^3}{12},$$

wenn mit b die Länge der Sehne im Abstande u vom Mittelpunkte bezeichnet wird, für den man die Schubspannung berechnen will.

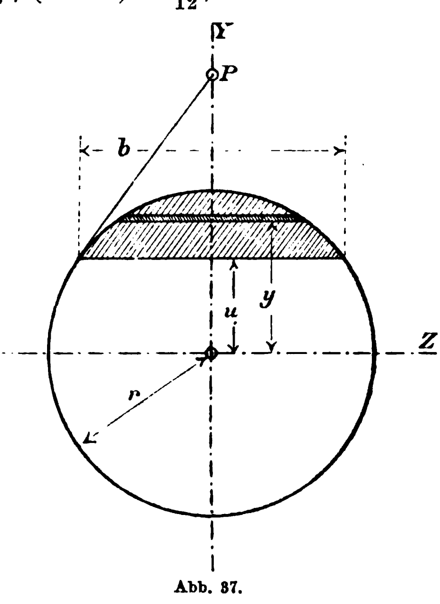


Abb. 37.

Nach Gl. (72) wird jetzt

$$\tau_{xy} = \frac{Vb^2}{12\Theta} = \frac{Vb^2}{3\pi r^4}.$$

Die Komponente τ_{xz} bestimmt sich am Umfange aus der Bedingung, daß die resultierende Spannung in die Richtung der Tangente fällt. Daraus folgt

$$\frac{\tau_{xz}}{\tau_{xy}} = \frac{u}{\frac{1}{2}b};$$

$$\tau_{xz} = \tau_{xy}\cdot\frac{2u}{b} = \frac{2Vub}{3\pi r^4},$$

und für die resultierende Spannung τ selbst erhält man nach dem Pythagoräischen Satze

$$\tau = \frac{Vb}{3\pi r^4}\cdot\sqrt{b^2 + 4u^2} = \frac{2Vb}{3\pi r^3}.$$

Die Schubspannungen nehmen, wie man hieraus erkennt, ihren größten Wert in der Mitte an. Dort wird $b = 2r$ und daher

$$\tau_{\max} = \frac{4V}{3\pi r^2},$$

d. h. die größte Schubspannung verhält sich zu der durchschnittlichen Schubspannung, die bei gleichförmiger Verteilung über den ganzen Querschnitt überall zustande käme, wie 4 zu 3.

18. Aufgabe. Wieviel Schubkraft hat ein Niet N am Ende des unten gezeichneten Blechbalkens aufzunehmen, wenn der Auflagerdruck 6000 kg beträgt?

Lösung. Nach Gl. (73) ist

$$P = \frac{Ve}{\Theta} S.$$

Für Θ findet man mit hinreichender Annäherung

$$\Theta = 2 \cdot 46 \cdot 23{,}5^2 + \frac{1 \cdot 48^3}{12} = 60022 \text{ cm}^4.$$

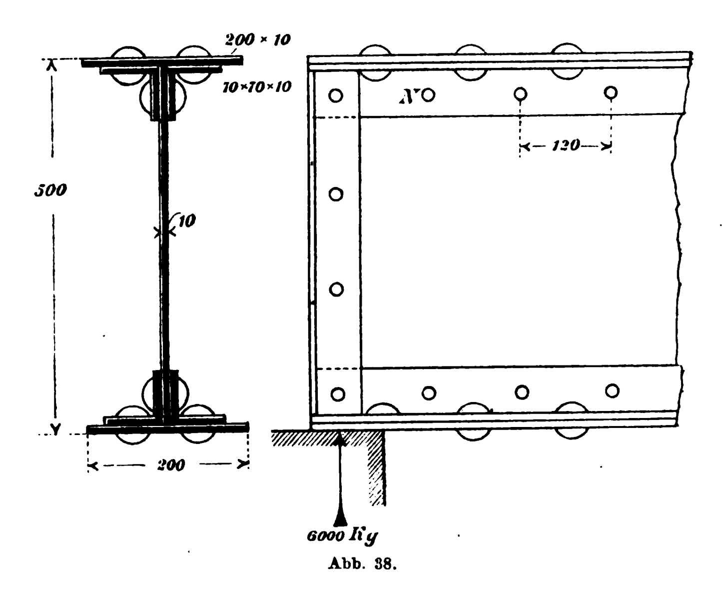


Abb. 38.

Hierbei ist der mittlere Abstand der Gurtfläche von der horizontalen Schwerlinie gleich 23,5 einfach geschätzt, wobei freilich die Dezimalstelle ganz unsicher ist. Für Rechnungen dieser Art genügt aber die dadurch gegebene Genauigkeit gewöhnlich vollauf; andernfalls muß Θ in der früher besprochenen Weise berechnet werden. Für S hat man ebenso

$$S = 46 \cdot 23{,}5 = 1081 \text{ cm}^3.$$

Hiermit folgt, da $V = 6000$ kg und $e = 12$ cm ist,

$$P = \frac{6000 \cdot 12}{60\,000} \cdot 1081 = 1300 \text{ kg},$$

eine Kraft, die sich auf zwei Scherflächen des Niets verteilt.

19. Aufgabe. Wie ändert sich der Wert des Biegungspfeiles f in Gl. (82), *wenn Θ nicht konstant, sondern überall proportional dem Biegungsmomente M ist?*

Lösung. Setzt man

$$\frac{M}{E\Theta} = c,$$

so geht die Differentialgleichung der elastischen Linie Gl. (76) über in

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -c$$

und durch zweimalige Integration folgt daraus

$$y = -\frac{cx^2}{2} + ax + b,$$

wenn a und b die Integrationskonstanten sind. Diese Gleichung gilt für die ganze Spannweite, da es hier gleichgültig ist, welchen Wert M an jeder Stelle annimmt; sie gilt aus demselben Grunde auch für jeden beliebigen Belastungsfall, wenn nur die für die Veränderlichkeit des Trägheitsmoments ausgesprochene Bedingung überall erfüllt ist. Die elastische Linie bildet daher in diesem Falle eine gemeine Parabel. Die Konstanten a und b folgen aus den beiden Grenzbedingungen, daß y für $x = 0$ und für $x = l$ verschwinden muß. Dies liefert $b = 0$ und aus

$$0 = -\frac{cl^2}{2} + al \quad \text{folgt} \quad a = \frac{cl}{2}.$$

Hiermit wird

$$y = \frac{c}{2}(lx - x^2)$$

und der Biegungspfeil f für die Balkenmitte folgt daraus mit $x = \frac{l}{2}$

$$f = \frac{cl^2}{8}.$$

Werden das Biegungsmoment und das Trägheitmoment in der Balkenmitte durch Anhängen des Zeigers m gekennzeichnet, so folgt durch Einsetzen des Wertes von c

$$f = \frac{M_m}{E\Theta_m} \cdot \frac{l^2}{8}.$$

Speziell für den Belastungsfall, zu dem Gl. (82) gehörte, ist $M_m = \frac{Pl}{4}$ und daher
$$f = \frac{Pl^3}{32\, E\,\Theta_m}.$$

Wäre das Trägheitsmoment nicht veränderlich, sondern überall gleich Θ_m, so würde an Stelle dieses Wertes der in Gl. (82) gegebene treten, d. h. der Faktor 32 im Nenner wäre durch 48 zu ersetzen. Der Biegungspfeil ist daher hier um 50% größer als bei konstantem Trägheitsmomente.

Die Voraussetzung, daß Θ proportional mit M sein soll, wird näherungsweise erfüllt bei einem Blechträger, dessen Querschnitt nach der Mitte hin durch Aufnieten von Platten verstärkt wird, so daß überall ungefähr dieselbe Spannung σ auftritt. Die Trägerhöhe wird nämlich durch das Aufnieten der Platten nicht erheblich geändert, so daß in der Tat die Spannung $\sigma = \frac{M}{\Theta} y$ überall ungefähr dem Verhältnisse $\frac{M}{\Theta}$ proportional ist.

20. Aufgabe. Die Konstante $\varkappa$ der Gl. (83) für den kreisförmigen Querschnitt zu berechnen.

Lösung. Nach Gl. (84) ist
$$\varkappa = \frac{F\int \tau^2 dF}{V^2}.$$

Beim kreisförmigen Querschnitte war in Aufgabe 17
$$\tau_{xy} = \frac{Vb^2}{3\pi r^4}$$
gefunden. Achtet man bei der Berechnung von $\varkappa$ nur auf die zur Lastrichtung parallele Komponente τ_{xy} der Schubspannung, so wird demnach bei Benutzung derselben Bezeichnungen wie in Abb. 37
$$\varkappa = \pi r^2 \int \frac{b^4}{9\pi^2 r^8}\, dF.$$

Zur Ermittelung des Momentes vierten Grades der Querschnittsfläche $\int b^4 dF$ setzen wir
$$\int b^4 dF = 32 \int_{-r}^{+r} z^5 dy = 64 \int_0^r (r^2 - y^2)^{\frac{5}{2}} dy.$$

Nun ist allgemein
$$\int (r^2 - y^2)^{\frac{5}{2}} dy = \frac{8(r^2 - y^2)^2 + 10 r^2 (r^2 - y^2) + 15 r^4}{48}\, y \sqrt{r^2 - y^2}$$
$$+ \frac{5}{16} r^6 \arcsin \frac{y}{r}.$$

Setzt man die Grenzen ein, so wird daher

$$\int b^4 dF = 10\pi r^6$$

und hiermit endlich

$$\varkappa = \frac{10}{9}.$$

In ähnlicher Weise kann $\varkappa$ auch unter Berücksichtigung der zweiten Komponente τ_{xz} von τ berechnet werden; es wird dann etwas größer gefunden. In jedem Falle handelt es sich indessen, wie schon früher bemerkt wurde, nur um eine Abschätzung des Wertes, die auf besondere Genauigkeit keinen Anspruch macht.

21. Aufgabe. Ein durchlaufender Balken überdeckt drei Öffnungen von gleicher Größe und ist gleichförmig belastet; man soll die Auflagerkräfte berechnen.

Lösung. Der Symmetrie wegen ist der Druck auf jede der beiden Mittelstützen gleich groß, er sei mit C bezeichnet. Der Auflagerdruck A am linken Trägerende ist dann $A = \frac{3ap}{2} - C$, wenn p die Last für die Längeneinheit und a die Weite einer Öffnung bedeuten.

In der ersten Öffnung hat man

$$M = x\left(\frac{3ap}{2} - C\right) - \frac{px^2}{2}.$$

Die Differentialgleichung der elastischen Linie wird daher für diesen Ast

$$E\Theta\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{px^2}{2} + x\left(C - \frac{3ap}{2}\right)$$

und hieraus durch Integration

$$E\Theta\frac{dy}{dx} = \frac{px^3}{6} + \frac{x^2}{2}\left(C - \frac{3ap}{2}\right) + K,$$

$$E\Theta y = \frac{px^4}{24} + \frac{x^3}{6}\left(C - \frac{3ap}{2}\right) + Kx + K'.$$

Wegen $y = 0$ für $x = 0$ hat man $K' = 0$ und wegen $y = 0$ für $x = a$ folgt

$$0 = \frac{pa^4}{24} + \frac{a^3}{6}\left(C - \frac{3ap}{2}\right) + Ka \quad \text{oder} \quad K = \frac{5pa^3}{24} - C\frac{a^2}{6}.$$

In der zweiten Öffnung ist

$$M = (x + a)\left(\frac{3ap}{2} - C\right) + Cx - p\frac{(a + x)^2}{2}$$

$$= \frac{pax}{2} + pa^2 - Ca - \frac{px^2}{2},$$

wenn hier die Abszissen x' von der Mittelstütze aus gerechnet werden. Die Differentialgleichung für den Mittelast der elastischen Linie lautet daher

$$E\Theta\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{px^2}{2} + Ca - \frac{pax}{2} - pa^2$$

und hieraus durch Integration

$$E\Theta\frac{dy}{dx} = \frac{px^3}{6} + Cax - \frac{pax^2}{4} - pa^2x + K'',$$

$$E\Theta y = \frac{px^4}{24} + Ca\frac{x^2}{2} - \frac{pax^3}{12} - \frac{pa^2x^2}{2} + K''x + K'''.$$

Für $x = 0$ und für $x = a$ verschwindet wieder y und daraus folgt $K''' = 0$ und

$$0 = \frac{pa^4}{24} + C\frac{a^3}{2} - p\frac{a^4}{12} - p\frac{a^4}{2} + K''a \quad \text{oder} \quad K'' = \frac{13}{24}pa^3 - C\frac{a^2}{2}.$$

Wir haben jetzt noch die Bedingung, daß sich die beiden Äste der elastischen Linie an der Mittelstütze ohne Knick aneinander schließen müssen. Dazu gehört, daß $\frac{dy}{dx}$ für $x = a$ im ersten Aste gleich $\frac{dy}{dx}$ für $x = 0$ im zweiten Aste wird. Dies liefert die Gleichung

$$\frac{pa^3}{6} + \frac{a^2}{2}\left(C - \frac{3ap}{2}\right) + K = K'',$$

oder nach Einsetzen der Werte von K und K''

$$\frac{a^2}{2}C - \frac{7}{12}pa^3 + \frac{5}{24}pa^3 - C\frac{a^2}{6} = \frac{13}{24}pa^3 - C\frac{a^2}{2}.$$

In dieser Gleichung ist C die einzige Unbekannte. Die Auflösung liefert

$$C = \frac{11}{10}pa.$$

Auf jede Mittelstütze kommt also um 10% mehr als die Last einer Öffnung. Da die gesamte Belastung des Trägers $3pa$ beträgt, bleibt für den Druck auf jede Endstütze $0{,}4pa$.

22. Aufgabe. Ein im Grundrisse rechteckig gestalteter Raum wird von zwei sich in der Mitte kreuzenden und an dieser Stelle miteinander verbundenen Trägern mit den Ordnungsnummern 1 und 2 überdeckt. An der Kreuzungsstelle ist eine Last P aufgehängt; wieviel kommt davon auf jeden Träger?

Lösung. Der Biegungspfeil f in der Mitte muß für beide Träger gleich sein. Nimmt der erste Träger den Anteil C, der

andere also $P-C$ der ganzen Last auf, so hat man die Bedingungsgleichung

$$\frac{C l_1^3}{48 E \Theta_1} = \frac{(P-C) l_2^3}{48 E \Theta_2},$$

woraus

$$C = P \frac{l_2^3 \Theta_1}{l_1^3 \Theta_2 + l_2^3 \Theta_1}$$

folgt. — Ganz ähnlich läßt sich die Aufgabe auch für den Fall lösen, daß sich die Träger nicht in der Mitte, sondern an irgend einer anderen Stelle kreuzen. An Stelle von f ist dann die zur betreffenden Abszisse gehörige Ordinate y der elastischen Linie jedes Trägers einzusetzen.

Vierter Abschnitt.

Die Formänderungsarbeit.

---

§ 32. Die potentielle Energie eines gebogenen Stabes.

Wenn man annimmt, daß die Schubspannungen neben den Normalspannungen nicht in Betracht kommen, oder wenn es sich um den Fall der reinen Biegungsbeanspruchung handelt, hat man für die auf die Raumeinheit bezogene Formänderungsarbeit nach Gl. (39)

$$\mathsf{A} = \frac{\sigma^2}{2E},$$

und für σ kann nach Gl. (46)

$$\sigma = \frac{M}{\Theta} y$$

gesetzt werden. Setzt man dies ein, multipliziert A mit dem Volumenelemente $d\tau$ und integriert über das Volumen eines Balkenelementes von der Länge dx, so erhält man für die in diesem Balkenelemente aufgespeicherte Formänderungsarbeit dA den Ausdruck

$$dA = \int \frac{M^2}{2E\Theta^2} y^2 d\tau.$$

Für $d\tau$ kann man aber $dx \cdot dF$ setzen. Der Faktor dx kann vor das Integralzeichen gesetzt werden, ebenso M, E und Θ, und man erhält

$$dA = \frac{M^2}{2E\Theta^2} dx \int y^2 dF.$$

Das verbliebene Integral stellt das Trägheitsmoment des Querschnitts dar; der Ausdruck vereinfacht sich daher zu

$$dA = \frac{M^2}{2E\Theta} dx. \qquad (87)$$

Zu demselben Ausdrucke kann man auch noch auf einem anderen Wege gelangen. Betrachtet man nämlich nur das eine Balkenelement während der Formänderung, so sind die an den beiden Querschnittsflächen auftretenden Normalspannungen äußere Kräfte für dieses Körperstück und die von ihnen geleistete Arbeit muß gleich der in dem Stücke aufgespeicherten potentiellen Energie sein. Eine Bewegung des Körperstücks als Ganzes kommt dabei nicht in Betracht, da sich die äußeren Kräfte daran im Gleichgewichte halten, die bei einer solchen Bewegung von ihnen geleistete Arbeit daher gleich Null ist. Wir brauchen uns daher nur um die relativen Bewegungen innerhalb des Körperelements zu kümmern. Am einfachsten geben wir uns über diese Rechenschaft, wenn wir uns den einen Querschnitt festgehalten denken. Der andere Querschnitt führt dann gegen diesen eine Drehung um den Winkel $d\varphi$ aus, der in Gl. (74) zu

$$d\varphi = \frac{M}{E\Theta} dx$$

berechnet ist. Die Normalspannungen an dem festgehaltenen Querschnitte leisten während dieser Bewegung keine Arbeit, da ihre Angriffspunkte in Ruhe bleiben. Am anderen Querschnitte können wir uns die Normalspannungen zu einem Kräftepaare vereinigt denken, dessen Moment gleich dem Biegungsmomente M ist. Die Arbeit bei der Drehung ist daher

$$dA = \tfrac{1}{2} M d\varphi = \frac{M^2}{2E\Theta} dx,$$

wie schon vorher gefunden war. Der Faktor $\frac{1}{2}$ mußte hier wieder deshalb beigefügt werden, weil das Moment nicht während der ganzen Bewegung dieselbe Größe M hat, sondern von Null an proportional mit der schon ausgeführten Formänderung bis auf den Endwert M anwächst. Als Mittelwert des Moments während der ganzen Drehung ist daher $\frac{1}{2} M$ einzuführen.

Die in dem ganzen Balken aufgespeicherte Formänderungsarbeit A ist demnach

$$A = \tfrac{1}{2}\int \frac{M^2}{E\Theta} dx. \tag{88}$$

Wenn die Arbeit der Schubspannungen nicht vernachlässigt werden soll, muß hierzu noch ein Glied gefügt werden, das aus den Entwicklungen in § 28 unmittelbar entnommen werden kann. Man muß dabei beachten, daß die Schubspannungen bei der Drehung der beiden Querschnitte gegeneinander keine Arbeit leisten, da die Wege der Angriffspunkte hierbei senkrecht zur Kraftrichtung stehen, während umgekehrt bei der Schiebung des einen Querschnitts relativ zum anderen die Bewegung senkrecht zu den Normalspannungen erfolgt, so daß hierbei nur die Schubspannungen Arbeit leisten. In der Tat wird daher die ganze Formänderungsarbeit für ein Balkenelement durch einfache Summierung der beiden Werte erhalten, von denen sich der eine nur auf die Drehung und die Normalspannungen, der andere nur auf die Schiebung und die Schubspannungen bezieht. Für ein Balkenelement war die Arbeit der Schubspannungen in § 28 zu

$$\tfrac{1}{2} V du = \varkappa \frac{V^2}{2GF} dx$$

gefunden. Mit Rücksicht auf die Schubspannungen wird daher die ganze im gebogenen Balken aufgespeicherte Formänderungsarbeit zu

$$A = \tfrac{1}{2}\int \frac{M^2}{E\Theta} dx + \tfrac{1}{2}\int \frac{\varkappa V^2}{GF} dx \tag{89}$$

erhalten.

Wenn etwa neben der Biegungsbeanspruchung noch eine achsiale Belastung des Stabes vorkommen sollte, muß dazu noch ein drittes Glied gefügt werden. An dieser Stelle soll aber auf solche Fälle nicht weiter eingegangen werden.

Die im Stabe aufgespeicherte potentielle Energie muß auch gleich der von den äußeren Kräften, also von den Lasten, während der Formänderung geleisteten Arbeit sein. Hierdurch sind wir in den Stand gesetzt, noch einen zweiten Ausdruck für A aufzustellen, den wir dem vorigen gleich setzen können. Die Auflagerkräfte leisten bei der Formänderung keine Arbeit. Ihre Angriffspunkte sind nämlich entweder vollständig festgehalten oder, wenn ein Angriffspunkt längs einer

Auflagerbahn beweglich ist, steht die Verschiebung, die er erfährt, senkrecht zur Richtung der Auflagerkraft; in beiden Fällen ist also die Arbeit gleich Null. Nur dann, wenn etwa ein Auflagerpunkt längs eines Gleitlagers verschieblich sein sollte, in dem eine Reibung von merklichem Betrage zu überwinden wäre, käme die Arbeit dieser Reibung in Betracht. Dieser Fall soll aber bei allen Betrachtungen dieses Abschnittes ausdrücklich ausgeschlossen werden; nur unter dieser Voraussetzung gelten, wie wohl zu beachten ist, die hier abzuleitenden Sätze streng.

Wir brauchen also nur die von den Lasten P geleisteten Arbeiten zu beachten. Bezeichnet man die Verschiebung, die der Angriffspunkt einer dieser Lasten P in der Richtung von P erfährt, mit y, so ist die Arbeit von P gleich $\frac{1}{2}Py$ zu setzen und wir haben daher auch

$$A = \frac{1}{2}\sum Py, \tag{90}$$

wobei die Summierung über alle Lasten zu erstrecken ist. Hierbei ist vorausgesetzt, daß die Einsenkungen proportional mit den Lasten wachsen, daß also das Hookesche Gesetz erfüllt ist. Der Faktor $\frac{1}{2}$ war, wie in früheren Fällen, wegen des allmählichen Anwachsens von P während der Formänderung des Balkens beizufügen. Ferner ist bei der Bildung des Ausdruckes von A angenommen, daß alle Lasten P gleichzeitig im selben Verhältnisse anwachsen, da nur unter diesen Umständen die zusammengehörigen Werte von P und y proportional miteinander wachsen. Freilich könnte derselbe Endzustand auch in anderer Weise erreicht werden, indem man z. B. eine der Lasten zuerst vollständig aufbrächte und dann erst die anderen folgen ließe. In diesem Falle würden die einzelnen Lasten andere Arbeitsbeträge leisten, als vorher angenommen war. Die Gesamtsumme aller Arbeiten könnte aber dadurch nicht geändert werden, da sie in jedem Falle gleich der im Balken aufgespeicherten Formänderungsarbeit sein muß, die nur von dem erreichten Endzustande und nicht von der Reihenfolge beim Aufbringen der einzelnen Lasten abhängt.

Auf diese Bemerkung wird weiterhin noch ausführlicher eingegangen werden; für jetzt genügt es, daß der Ausdruck in Gl. (90) jederzeit ausreicht, um die von den Lasten geleistete Gesamtarbeit darzustellen, falls nur das Hookesche Gesetz erfüllt ist und die Lasten allmählich, d. h. nicht plötzlich oder stoßweise aufgebracht wurden.

Wenn der Balken nur eine einzige Last trägt, kann die Gleichsetzung der Ausdrücke (90) und (88) oder (89) zur Berechnung der Verschiebung des Angriffspunktes der Last benutzt werden. Dies möge an dem Beispiele eines Balkens, der am einen Ende eingemauert ist und am freien Ende eine Last P trägt, erläutert werden. Im Abstande x vom freien Ende ist $M = Px$. Wenn wir den Einfluß der Schubkräfte auf die Durchbiegung vernachlässigen, erhalten wir A nach Gl. (88)

$$A = \frac{P^2}{2E\Theta}\int_0^l x^2 dx = \frac{P^2 l^3}{6E\Theta}.$$

Die Durchbiegung f des freien Endes folgt daher aus

$$\tfrac{1}{2}Pf = \frac{P^2 l^3}{6E\Theta} \quad \text{zu} \quad f = \frac{Pl^3}{3E\Theta}.$$

Dieses Ergebnis steht in Übereinstimmung mit dem in Gl. (82) für den Biegungspfeil eines beiderseits gestützten Balkens, der in der Mitte eine Last trägt. Der aus der Mauer vorkragende Balken verhält sich nämlich wie die Hälfte eines beiderseits gestützten von der doppelten Länge, der in der Mitte die doppelte Last trägt. In der Tat kann der soeben für f abgeleitete Wert auch in der Form

$$f = \frac{2P \cdot (2l)^3}{48E\Theta}$$

geschrieben werden, womit die Übereinstimmung nachgewiesen ist.

Selbstverständlich kann auch hier der Einfluß der Schubspannungen auf die Durchbiegung f leicht berücksichtigt

werden, indem man A nicht nach Gl. (88), sondern nach Gl. (89) berechnet. Man kommt dann wieder zu den gleichen Resultaten, wie nach dem früheren Verfahren.

§ 33. Die Sätze von Castigliano.

Es möge jetzt angenommen werden, daß eine der Lasten, die der Balken trägt, etwa die Last P_i, einen unendlich kleinen Zuwachs erfährt, während alle übrigen Lasten ungeändert bleiben. Wir wollen berechnen, um wieviel sich die Formänderungsarbeit A hierbei ändert. Das Verhältnis beider Zuwüchse, also der Differentialquotient $\frac{\partial A}{\partial P_i}$ kann auf verschiedene Art ermittelt werden, zunächst durch partielle Differentiation von Gl. (90) nach P_i. Hierbei ist zu beachten, daß jedes y von allen Lasten, die der Balken trägt, also auch von P_i abhängig ist. Das Glied $P_1 y_1$ der Summe in Gl. (90) liefert also bei der Differentiation einen Beitrag

$$P_1 \frac{\partial y_1}{\partial P_i}$$

und ebenso bei allen anderen Gliedern, abgesehen von $P_i y_i$ selbst. In diesem Gliede sind beide Faktoren veränderlich und es trägt daher (von dem Faktor $\frac{1}{2}$ abgesehen)

$$P_i \frac{\partial y_i}{\partial P_i} + y_i$$

zu dem Differentialquotienten bei. Wenn wir wieder alle Glieder von gleichem Baue durch ein Summenzeichen zusammenfassen, erhalten wir demnach

$$\frac{\partial A}{\partial P_i} = \frac{1}{2} \sum P \frac{\partial y}{\partial P_i} + \frac{1}{2} y_i. \tag{91}$$

Die Berechnung des Differentialquotienten durch Differentiieren hat den Sinn, daß wir uns P_i während des Aufbringens der Belastung stets etwas größer denken als vorher und es gleichzeitig mit den übrigen Lasten von Null an bis auf $P_i + dP_i$ anwachsen lassen. Anstatt dessen können wir uns aber auch zuerst alle Lasten in der früheren Größe und dann

noch nachträglich dP_i aufgebracht denken. Auf die Formänderungsarbeit kann diese Reihenfolge in der Herstellung der Belastung keinen Einfluß haben, denn in jedem Falle wird zuletzt derselbe Endzustand erreicht und die Arbeit der äußeren Kräfte muß immer im ganzen gleich der potentiellen Energie des gebogenen Balkens sein, die nur von dem Endzustande abhängig ist.

Wenn zuerst alle Lasten P in ihrer ursprünglichen Größe aufgebracht wurden, leisteten sie dabei die Arbeit A. Wenn jetzt dP_i hinzugefügt wird, vermehrt sich die Einsenkung y_1 des Angriffspunktes der Last P_1 um

$$\frac{\partial y_1}{\partial P_i} dP_i$$

und dabei leistet die Kraft P_1, die während dieser Bewegung unverändert bleibt, die Arbeit

$$P_1 \frac{\partial y_1}{\partial P_i} dP_i.$$

Dasselbe gilt für alle Lasten P, auch für P_i. Dazu kommt dann noch die Arbeit, die von dP_i selbst geleistet wird. Da dieser Lastzuwachs allmählich von 0 bis zum Endwerte dP_i anwächst, haben wir dafür

$$\tfrac{1}{2} dP_i \frac{\partial y_i}{\partial P_i} dP_i.$$

Der Vergleich mit den vorigen Gliedern zeigt, daß die von dP_i selbst geleistete Arbeit unendlich klein zweiter Ordnung ist und daher gegen die nur von der ersten Ordnung unendlich kleinen Arbeiten der Kräfte P verschwindet. Nach Division mit dP_i erhalten wir demnach aus dieser Betrachtung

$$\frac{\partial A}{\partial P_i} = \sum P \frac{\partial y}{\partial P_i}. \tag{92}$$

Wir können noch einen dritten Weg einschlagen, um $\frac{\partial A}{\partial P_i}$ zu berechnen. Zuerst sei nämlich auf den vorher unbelasteten Balken die Last dP_i aufgebracht. Sie leistet dabei die Arbeit

$$\tfrac{1}{2} dP_i \cdot \frac{\partial y_i}{\partial P_i} dP_i.$$

Dann seien alle Lasten P zugefügt, so daß sie gleichzeitig und gleichmäßig von Null an bis auf ihre Endwerte zunehmen. Dabei biegt sich der Balken weiter durch und zwar überall um ebenso viel, als wenn er vorher unbelastet gewesen wäre. Die Kräfte P leisten dabei die vorher schon mit A bezeichnete Arbeit; gleichzeitig erfährt aber der Angriffspunkt von dP_i eine weitere Senkung y_i und die zugehörige Arbeitsleistung ist gleich

$$dP_i \cdot y_i.$$

Im Ganzen haben wir daher mit Weglassung des von der zweiten Ordnung unendlich kleinen Gliedes

$$A + dA = \tfrac{1}{2} \sum Py + y_i\, dP_i,$$

woraus für den Differentialquotienten der dritte Ausdruck

$$\frac{\partial A}{\partial P_i} = y_i \tag{93}$$

folgt. Diese dritte Ableitung wäre freilich entbehrlich gewesen, denn schon aus dem Vergleiche der in den Formeln (91) und (92) gefundenen Werte geht hervor, daß

$$y_i = \sum P \frac{\partial y}{\partial P_i} \tag{94}$$

sein muß, womit jene Ausdrücke in den zuletzt gefundenen übergehen.

Der Übersichtlichkeit wegen sprach ich bei den vorausgehenden Entwickelungen immer nur von der Formänderung, die ein Balken erfährt, der durch die Lasten P auf Biegung beansprucht wird. Dieselben Betrachtungen lassen sich aber sinngemäß auch auf einen Körper von irgend einer anderen Gestalt übertragen, der so gestützt ist, daß er keine Verschiebung ohne Formänderung auszuführen vermag und an dem die Lasten P auf beliebige Art angebracht sind, falls nur für den Zusammenhang zwischen den Lasten und den Verschiebungen ihrer Angriffspunkte das Superpositionsgesetz erfüllt ist. Hierbei muß man beachten, daß die Lasten P bei

den vorhergehenden Entwickelungen als willkürlich veränderlich angesehen wurden; die Auflagerkräfte an den Stützpunkten, die von den Lasten P abhängig sind, dürfen daher bei der Anwendung der vorstehenden Formeln in die Lasten P nicht mit eingerechnet werden.

Wenigstens zunächst nicht; dagegen ist ja ohne weiteres klar, daß man bei einem Körper, der an mehr Stellen gestützt ist, als nötig wäre, um ihn vollständig festzuhalten, sich auch einige Stützen entfernt und die zugehörigen Auflagerkräfte als Lasten P angebracht denken kann, wenn man sich vorbehält, diese Lasten nachträglich so zu wählen, daß die Verschiebung ihrer Angriffspunkte zu Null wird. Jedenfalls müssen aber die beibehaltenen Stützen immer noch genügen, den Körper vollständig festzuhalten. Im übrigen ist dieses Verfahren ein Kunstgriff, der mit dem, was vorher bewiesen wurde, unmittelbar nichts zu tun hat. Es mag noch bemerkt werden, daß man durch einen ganz ähnlichen Kunstgriff die Gültigkeit der vorhergehenden Formeln auch für den Fall erweitern kann, daß der Körper überhaupt nicht oder nicht hinreichend gestützt ist, um Bewegungen ohne Formänderung auszuschließen, indem man die Verschiebungen y relativ zu einem in geeigneter Weise an dem Körper festgehefteten Koordinatensysteme rechnet und an den Punkten, durch die das Koordinatensystem geführt ist, willkürlich Auflagerkräfte zufügt, die sich für den tatsächlich gegebenen Belastungsfall nachträglich gleich Null erweisen. Hierauf brauche ich aber an dieser Stelle nicht weiter einzugehen, da in der Folge immer nur von Körpern die Rede sein wird, die hinreichend gestützt sind.

Unter der zu einer Kraft P gehörigen Verschiebung y ihres Angriffspunktes ist übrigens immer jener Komponente der gesamten Verschiebung zu verstehen, die in die Richtung der Kraft P fällt. Auf die Verschiebungskomponenten, die rechtwinklig zur Kraftrichtung stehen, kommt es bei der Formänderungsarbeit überhaupt nicht an. Ist der Weg y entgegengesetzt zum Pfeile der Kraft gerichtet, so muß er natürlich negativ gerechnet werden.

Gl. (93) spricht den von Castigliano aufgestellten Satz aus: „Die Verschiebung des Angriffspunktes einer Last bei der elastischen Formänderung eines dem Hookeschen Gesetze unterworfenen Körpers ist gleich der

nach dieser Last genommenen partiellen Ableitung der Formänderungsarbeit."

Diesem Satze schließt sich ein zweiter an, der durch eine einfache Schlußfolgerung aus ihm gewonnen wird. Ist nämlich unter den äußeren Kräften eine, von der wir wissen, daß ihr Angriffspunkt keine Verschiebung erfährt, so muß für sie nach Gl. (93)

$$\frac{\partial A}{\partial P} = 0 \qquad (95)$$

sein. Damit erhalten wir eine Gleichung, die zur Berechnung dieser Kraft, wenn deren Größe unbekannt war, benutzt werden kann. Gerade hierauf beruht die wichtigste Anwendung dieser Betrachtungen in der Festigkeitslehre. Gewöhnlich handelt es sich dabei um die Berechnung der Auflagerkräfte von statisch unbestimmten Konstruktionen, d. h. von solchen Konstruktionen, die mehr Auflagerbedingungen unterworfen sind, als zum Festhalten erforderlich wären. Man wählt dann gewisse Komponenten der Auflagerkräfte als die „statisch unbestimmten Größen des Problems" aus, d. h. man sieht sie als Lasten von unbekannter Größe an, während die übrigen Komponenten der Auflagerkräfte auf Grund der allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen der Statik in diesen Unbekannten und den gegebenen Lasten ausgedrückt werden können. Auch alle Biegungsmomente, Scherkräfte u. s. f. lassen sich dann in den gewählten Unbekannten ausdrücken und ebenso auch die Formänderungsarbeit A nach Gl. (88) oder (89). Da man nun weiß, daß die Angriffspunkte der unbekannten Auflagerkomponenten infolge der ihnen vorgeschriebenen Auflagerbedingungen keine Verschiebungen in den Richtungen dieser Kräfte ausführen können, liefert die Anwendung von Gl. (95) für jeden dieser Angriffspunkte eine Bedingungsgleichung und man erhält damit ebenso viele Gleichungen als Unbekannte. Man braucht dann nur noch diese Gleichungen, die alle vom ersten Grade sind, nach den Unbekannten aufzulösen.

Die Methode ist übrigens noch etwas allgemeiner, als sie bis jetzt dargestellt wurde. Es ist nämlich nicht nötig, daß

etwa P_i nur eine Einzelkraft bezeichne: es kann auch irgend eine Gruppe von äußeren Kräften vorstellen, wenn nur unter y_i eine Verschiebungsgröße verstanden wird, durch deren Multiplikation mit P_i (oder dem Mittelwerte von P_i bei allmählichem Aufbringen der Belastung) die geleistete Arbeit gefunden wird. Auch durch diese Erweiterung wird an den früheren Schlüssen gar nichts geändert.

Häufig ist es nämlich zweckmäßig, ein Kräftepaar an einer Auflagerstelle, an der der Träger eingespannt wird, als statisch unbestimmte Größe in die Rechnung einzuführen. Die Arbeit eines Kräftepaares hängt aber von der Drehung ab, die die Angriffsstelle im Sinne der Achse des Kräftepaares erfährt und unter dem zugehörigen y ist daher in diesem Falle der Drehungswinkel zu verstehen. Wenn man weiß, daß der Träger an dieser Stelle fest eingespannt ist, der Drehungswinkel also verschwinden muß, erhält man auch in diesem Falle die Bedingungsgleichung (95), in der jetzt unter P_i das unbekannte Auflagermoment zu verstehen ist.

Aber auch nach einer zweiten Richtung ist diese Betrachtung noch einer Erweiterung fähig. Es ist zur Durchführung der Berechnung der statisch unbestimmten Größen oft nützlich, eine Konstruktion in zwei (oder mehr) Teile zu zerlegen. Gewöhnlich führt man diese Zerlegung in solcher Weise aus, daß jeder Teil für sich genommen einen statisch bestimmten Träger bilden würde. Man muß dann nur die an der Verbindungsstelle zwischen beiden Trägerteilen in Wirklichkeit übertragenen inneren Kräfte als äußere Kräfte, also als Belastungen der beiden Teilstücke betrachten. Diese treten dann als die statisch unbestimmten Größen des Problems auf und auch für sie gilt Gl. (95).

Um dies zu erkennen, bedenke man, daß die ganze Formänderungsarbeit A hier in zwei Teile zerlegt werden kann

$$A = A_1 + A_2, \tag{96}$$

so daß A_1 die im ersten Teilstücke aufgespeicherte potentielle Energie bezeichnet und ebenso A_2 die im anderen Teilstücke.

Bedeutet nun P_i eine von dem zweiten Teilstücke auf das erste an der Verbindungsstelle übertragene unbekannte Kraft oder ein eben solches Moment, so hat man für den ersten Teil nach Gl. (93)

$$y_i = \frac{\partial A_1}{\partial P_i},$$

und dieselbe Gleichung läßt sich auch auf das zweite Teilstück anwenden. Wenn man nun weiß, daß die beiden Teile so miteinander zusammenhängen, daß die Verschiebungsgröße y_i für beide gleich groß sein muß, so liefert dies die Bedingungsgleichung

$$\frac{\partial A_1}{\partial P_i} = -\frac{\partial A_2}{\partial P_i}.$$

Das Minuszeichen auf der rechten Seite war nämlich nötig, weil am zweiten Trägerteile nach dem Gesetze der Aktion und Reaktion die statisch unbestimmte Größe gleich $-P_i$ ist. Aus Gl. (96) folgt daher auch in diesem Falle

$$\frac{\partial A}{\partial P_i} = \frac{\partial A_1}{\partial P_i} + \frac{\partial A_2}{\partial P_i} = 0.$$

Wir können jetzt alle diese Betrachtungen zu dem anderen von Castigliano herrührenden Satze zusammenfassen:

„Die partiellen Ableitungen der Formänderungsarbeit eines dem Hookeschen Gesetze unterworfenen Körpers nach den statisch unbestimmten Kräften, die so ausgewählt sind, daß sie selbst keine Arbeit leisten, sind gleich Null und aus den sich hieraus ergebenden Bedingungsgleichungen können die statisch unbestimmten Kräfte selbst berechnet werden.“

Gewöhnlich gibt man diesem Satze noch eine etwas andere Form, die zwar für die praktische Anwendung nichts neues lehrt, die sich aber durch die gedrängte Art der Aussage dem Gedächtnisse besser einprägen läßt. Die Gleichung

$$\frac{\partial A}{\partial P_i} = 0$$

ist nämlich eine notwendige Bedingung dafür, daß P_i so gewählt sei, um A entweder zu einem Maximum oder zu einem

Minimum zu machen. Nun muß ein Minimum der Formänderungsarbeit immer bestehen und da die vorstehende Gleichung für die Unbekannte P_i, wie aus den früheren Entwickelungen hervorging, vom ersten Grade ist, muß die einzige Lösung, die sie zuläßt, diesem Minimum entsprechen.

Mit Rücksicht hierauf kann man den vorhergehenden Satz auch in der Form aussprechen:

„Die statisch unbestimmten Größen machen die Formänderungsarbeit zu einem Minimum."

Er wird daher auch als der Satz vom Minimum der Formänderungsarbeit bezeichnet. Dabei muß aber, wie nochmals hervorgehoben werden soll, beachtet werden, daß die Minimumseigenschaft selbst bei den Anwendungen des Satzes gar keine Rolle spielt, sondern daß es dabei immer nur auf die Gleichungen von der Form

$$\frac{\partial A}{\partial P_i} = 0$$

ankommt.

Zur Erläuterung des Rechenverfahrens soll noch ein einfaches Beispiel behandelt werden. Ich wähle dazu einen Balken, der über zwei Öffnungen von ungleicher Größe reicht und eine über die ganze Länge gleichmäßig verteilte Belastung q auf die Längeneinheit trägt. Als statisch unbestimmte Größe wählen wir den Auflagerdruck Z (vgl. Abb. 39) an der Mittelstütze. Für die Auflagerkräfte B und C folgt dann aus den Gleichgewichtsbedingungen für den ganzen Balken

$$B = \frac{q(a+b)}{2} - \frac{Zb}{a+b}; \quad C = \frac{q(a+b)}{2} - Z\frac{a}{a+b}.$$

Abb. 39.

Für das Biegungsmoment in der ersten Öffnung hat man

$$M_1 = Bx - \frac{qx^2}{2}.$$

Diesen Wert setzen wir in den Ausdruck (88) für die Formänderungsarbeit ein. Das Trägheitsmoment des Balkens und der Elastizitätsmodul E

sind stillschweigend als konstant über die ganze Balkenlänge vorausgesetzt; es handelt sich also nur darum, das Integral

$$\int M^2 dx$$

auszuführen. Dies wird hier für die erste Öffnung

$$\int_0^a \left(B^2x^2 - Bqx^3 + \frac{q^2x^4}{4}\right) dx = B^2\frac{a^3}{3} - Bq\frac{a^4}{4} + q^2\frac{a^5}{20}.$$

Dazu kommt der Beitrag der zweiten Öffnung, der durch eine Rechnung von derselben Art festgestellt werden kann. Einfacher ist es aber hier, darauf aufmerksam zu machen, daß jede Öffnung bei geeigneter Aufstellung des Beobachters als die links liegende angesehen werden kann und daß der soeben berechnete Wert unmittelbar auch für die andere Öffnung benutzt werden kann, wenn man darin B mit C und a mit b vertauscht. Im ganzen erhält man daher für die Formänderungsarbeit des durchlaufenden Balkens

$$A = \frac{1}{2E\Theta}\left\{\frac{B^2a^3}{3} - \frac{Bqa^4}{4} + \frac{q^2a^5}{20} + \frac{C^2b^3}{3} - \frac{Cqb^4}{4} + \frac{q^2b^5}{20}\right\}.$$

Dieser Ausdruck wird durch den gesuchten Wert der Unbekannten Z zu einem Minimum gemacht oder mit anderen Worten, der Differentialquotient des Ausdrucks nach Z ist gleich Null zu setzen. Bei der Ausführung der Differentiation ist zu beachten, daß Z nur in B und C vorkommt, deren Abhängigkeit von Z schon vorher festgestellt wurde. Man erhält

$$\frac{\partial A}{\partial Z} = \frac{1}{2E\Theta}\left\{\left(\frac{2Ba^3}{3} - \frac{qa^4}{4}\right)\frac{\partial B}{\partial Z} + \left(\frac{2Cb^3}{3} - \frac{qb^4}{4}\right)\frac{\partial C}{\partial Z}\right\}.$$

Setzt man dies gleich Null und führt für B und C ihre Werte ein, ebenso für die Differentialquotienten die daraus hervorgehenden

$$\frac{\partial B}{\partial Z} = -\frac{b}{a+b}; \quad \frac{\partial C}{\partial Z} = -\frac{a}{a+b},$$

so findet man die Bedingungsgleichung

$$0 = -\frac{b}{a+b}\left(\frac{2a^3}{3}\left[\frac{q(a+b)}{2} - Z\frac{a}{a+b}\right] - \frac{qa^4}{4}\right) -$$
$$-\frac{a}{a+b}\left(\frac{2b^3}{3}\left[\frac{q(a+b)}{2} - Z\frac{a}{a+b}\right] - \frac{qb^4}{4}\right),$$

deren Auflösung den Wert der statisch unbestimmten Größe Z liefert. Man erhält

$$Z = q \cdot \frac{a^3 + 4a^2b + 4ab^2 + b^3}{8ab}.$$

Wenn man $a = b$ setzt, geht dies in $Z = \frac{5}{4}qa$ über, was wir für diesen besonderen Fall schon in § 29 gefunden haben.

Auch die Anwendung des Satzes vom Minimum der Formänderungsarbeit macht, wie schon aus diesem einfachen Beispiele hervorgeht, die Durchführung längerer Rechnungen nötig. In dieser Hinsicht ist die Methode der älteren kaum überlegen; ihr Hauptvorzug besteht darin, daß sie eine einfache Vorschrift für den ganzen Rechnungsgang aufstellt, die den Rechner der Mühe des Nachdenkens so ziemlich enthebt. Die Rechnung spielt sich in allen Fällen ungefähr in derselben Weise ab und stellt während ihrer Abwickelung die möglichst geringen Anforderungen an eine höhere geistige Tätigkeit. Nur weil der Satz vom Minimum der Formänderungsarbeit bei seiner Anwendung zugleich ein Minimum von Gedankenarbeit erfordert, ist er heute zu der Bedeutung eines der wichtigsten Sätze der technischen Mechanik gelangt. Übrigens soll in dieser Bemerkung durchaus nicht etwa irgend ein Vorwurf enthalten sein; vielmehr geht das Streben der Wissenschaft stets auf eine Ersparung von Gedankenarbeit hinaus und jede Änderung der früheren Darstellung, die hierzu verhilft, bildet einen wichtigen Fortschritt.

§ 34. Stoßweise Belastung.

Bei allen vorausgehenden Berechnungen der Formänderungsarbeit ist angenommen worden, daß die Belastung ganz allmählich von Null an auf ihren Höchstwert gesteigert wird.

Dies war nötig, um auszuschließen, daß ein merklicher Teil der von der äußeren Kraft geleisteten Arbeit zur Beschleunigung der Masse des belasteten Körpers verwendet, also in kinetische Energie umgesetzt wird. Diese Untersuchungen bedürfen aber jetzt noch einer Ergänzung. Die allmähliche Steigerung der Belastung bildet zwar die Regel; man kann aber durch geeignete Vorrichtungen auch erreichen, daß die Last plötzlich aufgebracht wird und von Anbeginn der Belastung an mit ihrer vollen Größe auf den Träger einwirkt. Den Weg des Angriffspunktes der Belastung während der elastischen Formänderung bis zum größten Ausschlage und in der Richtung der Kraft gemessen, wollen wir der Kürze halber in diesem Falle den dynamischen Biegungspfeil nennen und ihn mit f_d bezeichnen, obschon die ganze Betrachtung nicht nur für den Fall der Biegung, sondern für jeden Belastungsfall gültig ist. Die Arbeit der Last P ist dann gleich

$$Pf_d$$

zu setzen, da hier der Faktor $\frac{1}{2}$ fortfällt. Zunächst sieht man ein, daß f_d größer sein muß, als der früher berechnete statische Biegungspfeil f_s, der zu derselben Last P im Gleichgewichtszustande gehören würde. Denn wenn die elastische Formänderung bis zu f_s vorgeschritten ist, hat P schon eine Arbeit Pf_s geleistet, die nach den früheren Untersuchungen doppelt so groß ist, als die bei dieser Formänderung aufgespeicherte potentielle Energie. Die andere Hälfte der geleisteten Arbeit muß sich daher — unter der Voraussetzung, daß die Formänderung vollkommen elastisch ist — in lebendige Kraft der sich bewegenden Massen umgesetzt haben. Nach dem Trägheitsgesetze geht dann die Bewegung über die Formänderung f_s hinaus weiter. Diese weitere Bewegung ist eine verzögerte, da jetzt eine größere Belastung als P erforderlich wäre, um den erreichten Formänderungszustand aufrecht zu erhalten. Dabei verwandelt sich die vorher angesammelte lebendige Kraft ebenfalls in Formänderungsarbeit, und wenn die Bewegung bis zu f_d fortgeschritten ist, ist die ganze

zugeführte Energie in diese Form umgewandelt, so daß dann

$$A = Pf_d$$

gesetzt werden kann. In dieser Lage kann der Körper aber nicht verharren, da die Formänderung größer ist, als es der Last P im Gleichgewichtszustande entspricht; er geht daher wieder zurück und führt Schwingungen um die Gleichgewichtslage f_s herum aus.

Man weiß aus der Erfahrung, daß diese Schwingungen allmählich erlöschen. Dies rührt zum Teile vom Luftwiderstande und anderen Bewegungswiderständen, der Hauptsache nach aber davon her, daß eine schnell eintretende Formänderung, auch wenn sie nicht besonders groß ist, nicht mehr vollkommen elastisch erfolgt. Hierbei macht sich die schon in § 10 erwähnte innere Reibung geltend. Mit Rücksicht hierauf tut man besser, die vorige Gleichung durch

$$A = n \cdot Pf_d$$

zu ersetzen, wobei nun n einen von den Nebenumständen des Falles abhängigen Zahlenfaktor bedeutet, der sicher ein echter Bruch, unter gewöhnlichen Umständen aber nicht viel kleiner als 1 ist.

Hier handelt es sich nicht darum, den Verlauf der Schwingungen zu untersuchen, die der Körper um die Gleichgewichtslage ausführt, sondern nur um die größte Beanspruchung des Materials, die er während des ganzen Vorganges erleidet. Diese hängt von der größten Formänderung ab, die überhaupt vorkommt, also von f_d. Wir entscheiden die Frage am einfachsten dadurch, daß wir berechnen, wie groß eine Last P' sein müßte, die im Gleichgewichtszustande dieselbe Formänderung f_d hervorbrächte, wie sie hier unter P auftritt. Wir wissen, daß für diese

$$A = \tfrac{1}{2} P' f_d$$

wäre, und da A in beiden Fällen dieselbe potentielle Energie, die nur von dem erreichten Formänderungszustande abhängig ist, bedeutet, erhalten wir durch Gleichsetzung beider Werte

$$P' = 2nP \tag{97}$$

oder, wenn wir näherungsweise $n = 1$ setzen,

$$P' = 2P. \tag{98}$$

Beim plötzlichen Aufbringen der Belastung wird also ein Träger doppelt so stark beansprucht, als wenn er dieselbe Belastung im Gleichgewichtszustande trägt. Auf diesen einfachen Satz ist bei den Festigkeitsberechnungen vieler Tragkonstruktionen Rücksicht zu nehmen.

Ähnlich liegt z. B. der Fall bei Eisenbahnbrücken, über die ein Zug mit großer Geschwindigkeit fährt. Freilich ist der Vorgang hier verwickelter und überhaupt nur auf Grund einer eingehenden Untersuchung der auftretenden Schwingungen wenigstens näherungsweise zu verfolgen. Immerhin läßt sich von vornherein erwarten, daß größere Formänderungen auftreten werden, als sie einer gleichen ruhenden Belastung entsprechen würden, und man kann diesem Umstande auf Grund der vorausgehenden Betrachtungen dadurch Rechnung tragen, daß man die bewegte Last mit einem Zahlenfaktor multipliziert in die Rechnung einführt. So rührt von Gerber die Vorschrift her, daß man die bewegte Last in solchen Fällen mit dem $1^1/_2$fachen Betrage in Ansatz bringen soll. Der Zahlenfaktor ist kleiner als der in Gl. (98) gefundene Wert 2, was sich damit rechtfertigt, daß hier in der Tat von einem plötzlichen Aufbringen in die ungünstigste Laststellung nicht die Rede sein kann, so daß die Verstärkung der Beanspruchung niedriger zu schätzen ist als dort.

Schon das plötzliche Aufbringen einer Belastung ohne Anfangsgeschwindigkeit in der Durchbiegungsrichtung wird als eine stoßweise Belastung bezeichnet. Außerdem muß aber auch noch der Fall des Stoßes im engeren Sinne untersucht werden, bei dem die Last schon beim Auftreffen auf den Körper eine Geschwindigkeit v in der Richtung der nachher erfolgenden Durchbiegung und damit eine lebendige Kraft

$$L = \frac{Pv^2}{2g} = Ph$$

hatte. Unter h ist dabei die Fallhöhe zu verstehen, durch deren Durchlaufen die Geschwindigkeit v entweder wirklich erreicht wurde oder doch erreicht werden könnte. — Auch dieser Fall ist im allgemeinen wie der vorige zu behandeln: man setze

$$A = nP(h + f_d), \tag{99}$$

wobei n wieder ein Zahlenfaktor ist, der aber hier unter Umständen erheblich kleiner als 1 werden kann. In der zutreffenden Wahl oder in der richtigen Berechnung von n beruht die Schwierigkeit der Aufgabe, für die man bis jetzt noch keine vollständig befriedigende Lösung besitzt. Es kommen hier mehrere Umstände zusammen, die die Sache sehr verwickelt machen. Zunächst kommen, wie bei jedem Stoße, der nicht vollkommen elastisch erfolgt, Verluste an mechanischer Energie vor, die mit Erwärmungen und kleinen bleibenden Formänderungen in der Nähe der Aufschlagstelle zusammenhängen. Ferner erstreckt sich die Formänderung nicht plötzlich über den ganzen Träger, sondern sie pflanzt sich mit der zwar großen, aber doch nicht unendlich großen Schallgeschwindigkeit in ihm fort, so daß unter Umständen die der Stoßstelle ferner liegenden Teile erst in Bewegung kommen, wenn die „erste Stoßperiode" an der Aufschlagstelle vielleicht schon ganz abgelaufen ist. Schließlich kommt noch der durch die innere Reibung bei schnellen Formänderungen hervorgerufene Verlust an mechanischer Energie in Betracht, der beim Auftreffen der Last mit großer Geschwindigkeit von viel größerer Bedeutung werden kann, als beim plötzlichen Aufbringen der Last ohne Anfangsgeschwindigkeit.

Um wenigstens zu einer ungefähren Abschätzung zu gelangen, setzt man nach Cox, von dem diese Betrachtung zuerst angestellt wurde, voraus, daß sich die Formänderung am Ende der ersten Stoßperiode über den ganzen Träger erstreckt habe und berechnet den Verlust an mechanischer Energie nach der Formel für den unelastischen Stoß. Hierbei führt man an Stelle der ganzen Masse M des Trägers eine reduzierte Masse M' ein, die so bemessen wird, daß sie an der Stoßstelle vereinigt dieselbe lebendige Kraft ergeben würde, wie sie der Träger am Ende der ersten Stoßperiode erlangt hat. Unter der freilich sehr willkürlichen Voraussetzung, daß sich die Geschwindigkeiten der einzelnen Massenteilchen des durch den Stoß auf Biegung beanspruchten Balkens zueinander verhalten, wie die Durchbiegungen y, die sie bei einer an der Stoßstelle aufgebrachten ruhenden Last annehmen würden, erhält man

$$M' = \int \frac{y^2}{f^2} \mu \, dx,$$

wenn unter μ die auf die Längeneinheit bezogene Masse des Balkens und unter $\frac{y}{f}$ das Verhältnis der Durchbiegung an der Stelle x zum Biegungspfeile an der Belastungsstelle verstanden wird. Für den Fall, daß der Stoß in der Balkenmitte erfolgt, erhält man nach den Gleichungen (81) und (82)

$$\frac{y}{f} = 3\frac{x}{l} - 4\left(\frac{x}{l}\right)^3$$

für die Querschnitte zwischen 0 und $\frac{l}{2}$. Man hat daher

$$\int \frac{y^2}{f^2}dx = 2\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{y^2}{f^2}dx = 2\int_0^{\frac{l}{2}} \left[3\frac{x}{l} - 4\left(\frac{x}{l}\right)^3\right]^2 dx = \frac{17}{35}l,$$

womit, da $\mu l = M$ gesetzt werden kann, die reduzierte Masse M' übergeht in

$$M' = \frac{17}{35}M,$$

was rund die Hälfte von M ausmacht.

Nach der im ersten Bande abgeleiteten Formel für den Stoßverlust hat man nun

$$\text{Verl} = \frac{Q'P}{Q'+P}\cdot\frac{v^2}{2g} = \frac{Q'}{Q'+P}\cdot Ph,$$

wenn jetzt unter Q' das reduzierte Gewicht, also rund die Hälfte des ganzen Gewichts des vom Stoße getroffenen Balkens verstanden wird. Unter Vernachlässigung von f_d gegen h, was bei einigermaßen großen Stoßgeschwindigkeiten in der Regel zulässig ist, findet man daher für den Zahlenfaktor n

$$n = \frac{P}{Q'+P}.$$

Nach dieser Formel wird n rund gleich $^2/_3$, wenn die auftreffende Last dasselbe Gewicht hat wie der Balken und es wird um so kleiner, je kleiner die stoßende Last im Vergleiche zum Eigengewichte des Balkens ist. Das stimmt ja wohl auch ungefähr mit der Erfahrung überein. Als einigermaßen zuverlässig kann aber, wie schon bemerkt, diese Entwickelung wegen der Willkürlichkeit der Voraussetzungen, auf denen sie beruht, keineswegs betrachtet werden. Man wird vielmehr erst von späteren eingehenden Untersuchungen, die sich in erster Linie auf die Ergebnisse von hinlänglich zahlreichen Versuchen werden stützen müssen, eine

bessere, mit dem wirklichen Verhalten gut übereinstimmende, theoretische Darstellung der Festigkeit gegen Stoß erwarten dürfen.

Wenn n bekannt oder auf Grund einer Einschätzung angenommen ist, folgt daraus die gleichwertige statische Belastung P' und mit dieser die Beanspruchung des Materials wie vorher aus der Gleichung

$$\tfrac{1}{2} P' f_d = n P (h + f_d). \tag{100}$$

Die andere Unbekannte f_d läßt sich nämlich nach den früher dafür angestellten Betrachtungen in der zugehörigen statischen Belastung P' ausdrücken, worauf die Gleichung nur noch die eine Unbekannte P' enthält, nach der sie leicht aufgelöst werden kann. Ein Beispiel dafür findet man in Aufg. 24.

Schließlich möge noch auf einen Umstand hingewiesen werden, der die Festigkeit gegen Stoß sehr herabzusetzen vermag. Versieht man nämlich den Stab an der gefährdetsten Stelle (oder irgendwo, wenn die Beanspruchung wie beim achsialen Stoße überall dieselbe ist) mit einem Einschnitte, so wird durch diese Querschnittsverschwächung zwar auch schon die Festigkeit gegen ruhende Belastung herabgesetzt; in viel höherem Maße verliert aber der Stab die Fähigkeit, Stöße aufzunehmen, ohne sofort ganz zu zerbrechen. Die Widerstandsfähigkeit gegen Stöße hängt nämlich von der Formänderungsarbeit ab, die geleistet werden muß, ehe der Bruch beginnt. Wenn aber z. B. eine Zugstange mit einer ringsum laufenden Eindrehung versehen ist, tritt an dieser Stelle der Bruch bereits ein, bevor sich der übrige Teil des Stabes zu strecken vermochte. Es wird daher schon ein Stoß von weit geringerer Energie ausreichen, um den Bruch herbeizuführen. Auf diesen Umstand hat der Ingenieur öfters zu achten (vgl. z. B. Zimmermann im Zentralbl. der Bauverwaltung 1899, S. 265); auch Anbrüche, d. h. Risse, die ein Stab bei früheren Gelegenheiten davon getragen hat, wirken in derselben Weise und geben oft Veranlassung zu Brüchen bei verhältnismäßig geringen Stößen.

§ 35. **Satz von Maxwell über die Gegenseitigkeit der Verschiebungen.**

Dieser wichtige Satz läßt sich mit wenigen Worten aus den Sätzen von Castigliano ableiten. Das soll zuerst geschehen; da aber hierbei nicht leicht zugleich das volle Verständnis für den Sinn des Satzes gewonnen werden kann, werde ich nachträglich noch eine andere Ableitung geben, die leichter verständlich ist.

Nach Gl. (94) ist

$$y_i = \sum P \frac{\partial y}{\partial P_i}.$$

Wir wollen diese Gleichung nach irgend einer der anderen Lasten, etwa nach P_k differentiieren. In jedem Gliede der rechten Seite ist der Faktor $\frac{\partial y}{\partial P_i}$ von P_k abhängig, der andere Faktor nur in dem einen Gliede, das sich auf P_k selbst bezieht. Beim Differentiieren erhalten wir also auf der rechten Seite ein Glied mehr als wir hatten, nämlich

$$\frac{\partial y_i}{\partial P_k} = \sum P \frac{\partial^2 y}{\partial P_i \partial P_k} + \frac{\partial y_k}{\partial P_i}. \qquad (101)$$

Wenn das Superpositionsgesetz für die elastischen Formänderungen gültig ist, sind die elastischen Verschiebungen y Funktionen ersten Grades der Lasten; y_i ist also etwa von der Form

$$y_i = \alpha_{i1} P_1 + \alpha_{i2} P_2 + \alpha_{i3} P_3 + \cdots + \alpha_{ii} P_i + \cdots \qquad (102)$$

Die von der Gestalt und den elastischen Eigenschaften des Körpers, sowie von der Lage des Punktes, zu dem y_i gehört, und der Lage des Angriffspunktes der betreffenden Last abhängigen Koeffizienten α pflegt man als die Einflußzahlen der zugehörigen Lasten auf die Durchbiegungen oder sonstigen Formänderungen y zu bezeichnen.

Unter dieser Voraussetzung verschwinden alle zweiten Differentialquotienten der y und Gl. (101) vereinfacht sich zu

$$\frac{\partial y_i}{\partial P_k} = \frac{\partial y_k}{\partial P_i}. \qquad (103)$$

Mit Rücksicht auf Gl. (102) läßt sich dies auch in der Form

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ki} \tag{104}$$

aussprechen. Der Einfluß der Last k auf die Verschiebung des Angriffspunktes von i ist demnach ebenso groß, als der Einfluß der Last i auf die Verschiebung des Angriffpunktes von k. Das ist der Maxwellsche Satz.

Ich gebe jetzt eine von den früheren Betrachtungen unabhängige Ableitung, bei der ich mich der Anschaulichkeit wegen auf die Betrachtung des einfachsten, aber auch am häufigsten vorkommenden Falles beschränke. In Abb. 40 ist ein auf zwei Stützen ruhender Balken gezeichnet, von dem irgend zwei beliebig ausgewählte Querschnitte mit den Ordnungsziffern I und II versehen wurden. Ich denke mir zunächst eine Last P_1 im Querschnitte I aufgebracht. Wäre P_1 gleich der Lasteinheit, so müßte die Durchbiegung unter dieser Last im Querschnitte I nach den vorhergehenden Festsetzungen mit α_{11} und im Querschnitte II mit α_{21} bezeichnet werden. Diese Größen sind wieder die Einflußzahlen der Last im Querschnitte I auf die Durchbiegungen in den Querschnitten I und II und die wirklichen Durchbiegungen infolge von P_1 sind $\alpha_{11} P_1$ für den ersten und $\alpha_{21} P_1$ für den zweiten Querschnitt.

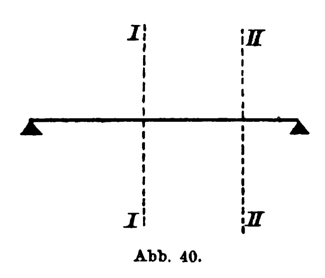


Abb. 40.

Dann soll auch eine andere Last P_2 im Querschnitte II aufgebracht werden, deren Einflußzahlen entsprechend mit α_{12} und α_{22} bezeichnet seien, so also, daß der erste Zeiger immer angibt, an welchem Querschnitte die Einsenkung beobachtet wird, während der zweite die Laststellung beschreibt.

Wenn man erst P_1 und dann P_2 aufbringt, leisten beide Kräfte Arbeiten, deren Summe gleich der im Endzustande des Balkens aufgespeicherten potentiellen Energie ist. Während P_1

aufgebracht wird, ist die von ihm geleistete Arbeit gleich

$$\tfrac{1}{2} P_1 \cdot \alpha_{11} P_1 .$$

Während des hierauf folgenden Aufbringens von P_2 verschieben sich die Angriffspunkte beider Kräfte. Beide leisten also Arbeit, wobei zu beachten ist, daß P_1 während der ganzen Dauer dieses Vorgangs seine Größe beibehält, während P_2 von Null bis zu seinem Endwerte anwächst. Die in dieser zweiten Periode geleistete Arbeit ist daher

$$P_1 \cdot \alpha_{12} P_2 + \tfrac{1}{2} P_2 \cdot \alpha_{22} P_2 .$$

Im ganzen wird daher die potentielle Energie des vollständig belasteten Balkens

$$A = \tfrac{1}{2} \alpha_{11} P_1^2 + \alpha_{12} P_1 P_2 + \tfrac{1}{2} \alpha_{22} P_2^2 . \tag{105}$$

Man kann aber zu demselben Endzustande auch dadurch gelangen, daß man zuerst P_2 und dann erst P_1 aufbringt. Dann lassen sich dieselben Schlüsse wiederholen, wobei sich nur die Zeiger 1 und 2 miteinander vertauschen. Man findet daher auch

$$A = \tfrac{1}{2} \alpha_{22} P_2^2 + \alpha_{21} P_2 P_1 + \tfrac{1}{2} \alpha_{11} P_1^2 .$$

Dieser Wert muß dem vorausgehenden gleich sein und der Vergleich zwischen ihnen zeigt, daß

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} \tag{106}$$

ist, womit der Maxwellsche Satz von neuem bewiesen ist.

Nachträglich überzeugt man sich leicht, daß die der Abb. 40 zugrunde liegende besondere Voraussetzung über die Gestalt und die Belastungsweise des Trägers unwesentlich ist. Man kann diese Abbildung auch durch die nebenstehende ersetzen, in der ein beliebig gestalteter und beliebig aufgelagerter Träger dargestellt werden soll. Auf diesem Körper wähle man zwei beliebige Punkte I und II aus und ziehe durch jeden in be-

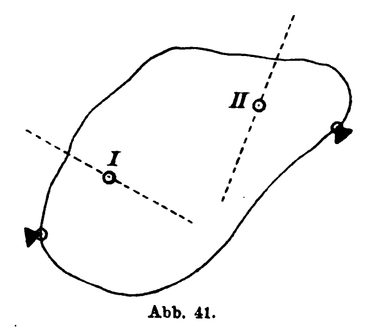


Abb. 41.

liebiger Richtung irgend eine gerade Linie. Läßt man dann eine Kraft an I in der angenommenen Richtung angreifen, so wird sich II in irgend einer Richtung verschieben. Von dieser Gesamtverschiebung beachten wir aber nur jene Komponente, die in die Richtung der durch II gelegten Geraden fällt. Und diese Verschiebung ist ebenso groß, als sich I in der zugehörigen Richtung verschieben würde, wenn man an II eine ebenso große Kraft in der dort gewählten Richtung angreifen ließe. Denn in der Tat lassen sich die vorausgehenden Schlüsse ohne jede Änderung auch auf den Fall der Abb. 41 übertragen.

Es bleibt mir jetzt noch übrig, auf die Anwendungen hinzuweisen, die man von dem Maxwellschen Satze bei den Festigkeitsberechnungen der technischen Praxis macht. Diese sollen an zwei einfachen, schon früher mehrfach behandelten Beispielen erläutert werden.

Bei der Berechnung eines über zwei Öffnungen durchlaufenden Balkens auf Grund des Maxwellschen Satzes beginnt man damit, die Mittelstütze fortzunehmen und an dieser Stelle eine Last von $1\,t$ (oder überhaupt von der Krafteinheit) anzubringen. Man ermittelt nun die Gestalt der elastischen Linie, die diesem Belastungsfalle entspricht, entweder auf dem Wege der Rechnung, wie es früher erläutert wurde, oder auf graphischem Wege. Die Abszisse der Mittelstütze vom linken Auflager gerechnet, sei mit a, die eines beliebigen anderen Querschnitts mit x bezeichnet. Dann gibt die Ordinate der elastischen Linie im Querschnitte x unmittelbar die Einflußzahl

$$\alpha_{xa}$$

an. Nach dem Maxwellschen Satze ist aber

$$\alpha_{ax} = \alpha_{xa}$$

und wir kennen damit auch die Einsenkung am Querschnitte a bei fortgenommener Mittelstütze, wenn im Querschnitte x die Lasteinheit angreift. Daraus folgt aber durch eine schon früher wiederholt benutzte einfache Überlegung auch die Größe des Auflagerdrucks auf der Mittelstütze bei diesem Belastungsfalle.

Die Auflagerkraft muß nämlich so groß sein, daß sie jene Durchbiegung wieder rückgängig macht. Nun kennen wir schon aus der gezeichneten elastischen Linie die elastische Verschiebung α_{aa} des Querschnitts an der Mittelstütze für eine an dieser selbst angreifende Lasteinheit und wir wissen, daß die elastische Verschiebung der Größe der Last proportional ist. Wir haben also, wenn die Last im Querschnitte x mit P und der von ihr in Wirklichkeit an der Mittelstütze hervorgerufene Auflagerdruck mit Z bezeichnet wird, die Gleichung

$$\alpha_{aa} Z = \alpha_{ax} P,$$

woraus mit Rücksicht auf den Maxwellschen Satz

$$Z = \frac{\alpha_{xa}}{\alpha_{aa}} P \tag{107}$$

folgt. Das Verhältnis der zwei Ordinaten der ursprünglich gezeichneten elastischen Linie in den Querschnitten x und a lehrt uns also sofort für jede beliebige Stellung einer Einzellast den Bruchteil kennen, der von dieser Einzellast auf die Mittelstütze übertragen wird. Dieser Anteil ist überall proportional mit der Ordinate α_{xa} der elastischen Linie. Man bezeichnet daher diese elastische Linie als die Einflußlinie für den Auflagerdruck Z.

Sobald die Vorarbeit des Aufzeichnens dieser Linie erledigt ist, kann die weitere Berechnung des durchlaufenden Trägers genau so erfolgen, als wenn er statisch bestimmt wäre. Denn man ist imstande, für jeden beliebigen Belastungsfall — z. B. wenn ein Eisenbahnzug die Belastung bildet — sofort den Auflagerdruck Z nach der Gleichung

$$Z = \frac{1}{\alpha_{aa}} \sum \alpha_{xa} P$$

anzugeben, worauf die übrigen Auflagerkräfte, die Momente und Scherkräfte genau so wie beim Balken über einer Öffnung folgen. Gerade hierin beruht die große Bedeutung des Maxwellschen Satzes für die Festigkeitsberechnungen der Praxis. Man muß dabei sehr viele verschiedene Laststellungen in Betracht ziehen und es wäre äußerst mühsam, wenn man dabei

immer wieder von neuem die Rechnung auf Grund der Elastizitätslehre auszuführen hätte. Dem ist man durch die vorausgehenden Erörterungen vollständig enthoben. Die Konstruktion einer einzigen elastischen Linie genügt, um alle Unterlagen für die weiteren Berechnungen zu liefern.

Bei diesem Beispiele kam nur eine statisch unbestimmte Größe vor. Ich betrachte, um zu zeigen, wie man in verwickelteren Fällen verfährt, jetzt noch einen Balken, der über drei Öffnungen durchläuft. Vom linken Auflager gerechnet, sei die Ordinate der ersten Mittelstütze mit a, die der zweiten mit b bezeichnet. Man entfernt zuerst beide Mittelstützen und bringt im Querschnitte a die Lasteinheit auf. Die Ordinaten der zugehörigen elastischen Linie, die man konstruiert, geben für jeden Querschnitt x die Einflußzahl α_{xa} und damit auch α_{ax} an. Dann wird eine zweite elastische Linie konstruiert für die im Querschnitte b angreifende Belastungseinheit, wodurch man die Einflußzahlen α_{xb} und α_{bx} erhält. Nach diesen Vorarbeiten kann man die Auflagerkräfte C und D an den beiden Mittelstützen, die zu einer Last P in irgend einem Querschnitte x gehören, sofort durch Auflösen der beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{aa}C + \alpha_{ab}D = P\alpha_{ax} \\ \alpha_{ba}C + \alpha_{bb}D = P\alpha_{bx} \end{aligned}\right\} \qquad (108)$$

erhalten, von denen die erste ausspricht, daß sich die erste Mittelstütze in Wirklichkeit nicht in vertikaler Richtung verschieben kann, während die zweite dasselbe für die zweite Mittelstütze aussagt. Die Auflösung liefert

$$C = B \cdot \frac{\alpha_{ax}\alpha_{bb} - \alpha_{bx}\alpha_{ab}}{\alpha_{aa}\alpha_{bb} - \alpha_{ab}^2}; \quad D = P \cdot \frac{\alpha_{ax}\alpha_{ba} - \alpha_{bx}\alpha_{aa}}{\alpha_{ab}^2 - \alpha_{aa}\alpha_{bb}}. \qquad (109)$$

Die Faktoren von P in diesen Gleichungen können, da alle darin vorkommenden α durch die beiden elastischen Linien gegeben sind, ohne weiteres berechnet werden, womit man die Einflußlinien der Lasten auf die beiden Mittelstützendrücke findet. Von da ab kann die Berechnung auch dieses Trägers genau so durchgeführt werden, als wenn er statisch bestimmt wäre. Man sieht leicht ein, wie dasselbe Verfahren in anderen

Fällen anzuwenden ist. Die weiteren Ausführungen darüber gehören nicht mehr der allgemeinen Festigkeitslehre, sondern der Lehre vom Brückenbaue an.

Aufgaben.

23. Aufgabe. Eine Spannweite von 6 m (vgl. den Grundriß Abb. 42) *wird durch drei nebeneinander liegende* I-*Träger vom Normalprofile 36, für das* Θ *nach dem deutschen Normalprofilbuche zu 19766* cm^4 *angegeben ist, in gleichen Abständen von 1 m überdeckt. In der Mitte sind die Träger durch einen Querträger N. P. 20* ($\Theta = 2162\ cm^4$) *verbunden. Welche Last P darf man an der mittleren Kreuzungsstelle anbringen, wenn die Spannung* σ *an keiner Stelle 1000 atm überschreiten soll? Vom Eigengewichte der Träger kann abgesehen werden.*

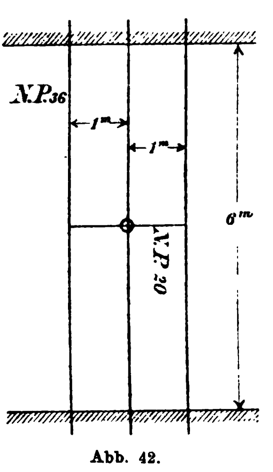


Abb. 42.

Lösung. Wir denken uns die Konstruktion in zwei Teile geteilt, von denen der eine nur den mittleren Hauptträger, der andere die beiden äußeren Hauptträger und den Querträger umfaßt. Jeder dieser Teile für sich genommen ist statisch bestimmt und als einzige statisch unbestimmte Größe der ganzen Aufgabe kommt der Anteil Z in Betracht, den der mittlere Hauptträger von der Last P, die an ihm angebracht ist, auf den Querträger abgibt. Am mittleren Hauptträger bleibt dann die Belastung $P - Z$ und der Querträger seinerseits gibt an jeden der beiden äußeren Hauptträger die Last $\frac{Z}{2}$ weiter. An der Kreuzungsstelle müssen sich die beiden statisch bestimmten Teile, in die wir uns die ganze Konstruktion zerlegt dachten, um gleichviel senken; wir finden daher die statisch unbestimmte Größe Z nach § 33, indem wir die Abgeleitete der Formänderungsarbeit nach Z gleich Null setzen. Zunächst ist also A als Funktion von Z zu berechnen.

Wenn ein beiderseits gestützter Balken in der Mitte die Last Q trägt, ist das Biegungsmoment M auf der linken Hälfte im Abstande x vom Auflager gleich $\frac{Q}{2}x$. Die in der linken Hälfte aufgespeicherte Formänderungsarbeit berechnet sich daraus mit Vernachlässigung der Arbeit der Schubspannungen, die in solchen Fällen

immer zulässig ist, nach Gl. (88). Die Formänderungsarbeit für den ganzen Balken ist doppelt so groß und daher gleich

$$\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M^2}{E\Theta} dx = \frac{Q^2}{4E\Theta}\int_0^{\frac{l}{2}} x^2 dx = \frac{Q^2 l^3}{96 E\Theta}.$$

Für den mittleren Hauptträger haben wir hierin an Stelle von Q die Last $P - Z$, $l = l_1 = 6$ m und $\Theta = \Theta_1 = 19\,766$ cm^4 zu setzen, für jeden der beiden äußeren Hauptträger wird $Q = \frac{Z}{2}$, während die anderen Werte bleiben, und für den Querträger ist $Q = Z$, $l = l_2 = 2$ m und $\Theta = \Theta_2 = 2162$ cm^4. Im ganzen wird daher die Formänderungsarbeit der gesamten Konstruktion

$$A = \frac{(P-Z)^2 l_1^{\,3}}{96 E\Theta_1} + 2\cdot\frac{\left(\frac{Z}{2}\right)^2 l_1^{\,3}}{96 E\Theta_1} + \frac{Z^2 l_2^{\,3}}{96 E\Theta_2}.$$

Die Einsetzung der Zahlenwerte wird besser bis zuletzt vorbehalten. Durch Nullsetzen des Differentialquotienten von A nach Z erhalten wir die Bestimmungsgleichung

$$0 = -2\cdot\frac{(P-Z)l_1^{\,3}}{96 E\Theta_1} + \frac{Z l_1^{\,3}}{96 E\Theta_1} + 2\cdot\frac{Z l_2^{\,3}}{96 E\Theta_2}.$$

Die Auflösung liefert

$$Z = \frac{2 P l_1^{\,3}}{3 l_1^{\,3} + 2 l_2^{\,3}\frac{\Theta_1}{\Theta_2}} = 0{,}544\,P.$$

Es fragt sich jetzt, an welcher Stelle die größte Beanspruchung des Materials zu erwarten ist. Diese kann entweder in der Mitte des mittleren Hauptträgers oder in der Mitte des Querträgers auftreten, denn die seitlichen Hauptträger sind offenbar weniger beansprucht, als der in der Mitte. Das von dem mittleren Hauptträger in der Mitte aufzunehmende Biegungsmoment beträgt

$$\frac{l_1(P-Z)}{4} = 68{,}4\,P \,\text{cm kg}.$$

Wenn die Spannung an dieser Stelle 1000 atm betragen soll, berechnet sich P aus der Gleichung

$$1000 = \frac{68{,}4\,P}{19766}\cdot 18, \quad \text{also} \quad P = 16\,000 \text{ kg}.$$

Das Biegungsmoment im Mittelquerschnitte des Querträgers

ist dagegen gleich $\frac{200 \cdot 0{,}544 P}{4} = 27{,}2 P$, und wenn hier die zulässige Spannung von 1000 atm nicht überschritten werden soll, darf P, wie aus der Gleichung

$$1000 = \frac{27{,}2 P}{2162} \cdot 10$$

folgt, nur $P = 8000$ kg betragen. Der Querträger ist also am meisten gefährdet, und wenn er auf Grund des Ergebnisses der Rechnung nicht verstärkt wird, ist nur eine Last von 8000 kg für die Konstruktion zulässig.

24. Aufgabe. Ein I-*Balken N. P. 24* ($\Theta = 4288$ *cm*^{4}, *Gewicht 36,2 kg f. d. lfd. m*) *überbrückt eine Spannweite von 2 m. Wie hoch darf eine Last von 400 kg auf die Mitte des Trägers herabfallen, ohne daß die Spannung von 1600 atm überschritten wird, wenn man annimmt, daß etwa 80%* *der lebendigen Kraft in Gestalt von Formänderungsarbeit auf den Balken übergehen und wenn der Elastizitätsmodul = 2000000 atm gesetzt wird?*

Lösung. Berechnet man nach der Näherungstheorie von Cox den Bruchteil n der zur Formänderung des Balkens aufgewendeten Energie, so erhält man

$$n = \frac{P}{Q' + P} = \frac{400}{35 + 400} = 0{,}92\,.$$

Nach den Ergebnissen von Versuchen ist aber n nicht leicht größer als 0,80 anzunehmen, so daß dieser Wert stets schätzungsweise einzusetzen ist, wenn die Coxsche Formel einen höheren Betrag liefert.

Wir berechnen hierauf die ruhende Belastung P', durch die die angenommene Spannung $\sigma = 1600$ atm hervorgerufen würde. Aus

$$\sigma = \frac{P' l}{4 \Theta} \cdot e \quad \text{folgt dafür} \quad P' = \frac{4 \Theta \sigma}{e l}\,.$$

Die hierbei aufgespeicherte Formänderungsarbeit ist

$$A = \left(\frac{4 \Theta \sigma}{e l}\right)^2 \frac{l^3}{96 E \Theta} = \frac{\sigma^2 l \Theta}{6 e^2 E}$$

oder nach Einsetzen der Zahlenwerte $\sigma = 1600$ atm, $l = 200$ cm $\Theta = 4288$ cm^4, $e = 12$ cm und $E = 2\,000\,000$ atm

$$A = 1270 \text{ cmkg.}$$

Die Höhe h, aus der die Last herabfallen darf, folgt aus

$$0{,}8 \cdot 400 \cdot h = 1270 \quad \text{zu} \quad h = 4{,}0 \text{ cm.}$$

Diese Zahl ist indessen noch nicht ganz genau, da das Gewicht von 400 kg beim Herabsinken um den dynamischen Biegungspfeil f_d auch noch eine Arbeit leistet. Eigentlich ist daher $h + f_d = 4{,}0$ cm. Der Biegungspfeil f_d ist gleich dem statischen Biegungspfeile für die Last P', also

$$f_d = \frac{P' l^3}{48 E \Theta} = \frac{\sigma l^2}{12 e E} = 0{,}22 \text{ cm.}$$

Die ursprüngliche Höhe h des Gewichtes über dem Träger darf daher nur etwa 38 mm betragen, wenn die zugelassene Spannung nicht überschritten werden soll.

25. Aufgabe. Ein Brückenträger erfuhr unter einer Einzellast von 10 t Einsenkungen, die an drei verschiedenen Stellen zu 2,0, 2,5 und 4,0 mm beobachtet wurden. An diesen drei Stellen werden nachher Lasten von 8, 12 und 6 t aufgebracht. Um wieviel senkt sich jene Stelle, die vorher als Angriffspunkt der Einzellast von 10 t gedient hatte?

Lösung. Stillschweigend ist vorausgesetzt, daß die Formänderung vollkommen elastisch ist. Nach dem Maxwellschen Satze ist die gesuchte Durchbiegung

$$y = 8 \cdot 0{,}2 + 12 \cdot 0{,}25 + 6 \cdot 0{,}4 = 7{,}0 \text{ mm.}$$

Fünfter Abschnitt.

Stäbe mit gekrümmter Mittellinie.

---

§ 36. Die ebene Biegung von schwach gekrümmten Stäben.

Ein Stab, dessen Krümmungshalbmesser im spannungslosen Zustande weit größer ist, als die in die Biegungsebene fallende Querschnittshöhe, verhält sich bei der Biegung ganz ähnlich wie ein ursprünglich gerader Stab. Für einen solchen „schwach gekrümmten“ Stab wollen wir zunächst berechnen, in welchen Wert ϱ' der Krümmungshalbmesser ϱ an einer bestimmten Stelle übergeht, wenn für diese Stelle das Biegungsmoment M, die achsiale Belastung N und die Schubkraft gegeben sind. Dabei wird der Fall der ebenen Biegung vorausgesetzt, d. h. die Mittellinie des Stabes soll vor der Formänderung eine ebene Kurve gewesen sein, in deren Ebene alle an dem Stabe angreifenden äußeren Kräfte enthalten sind und jeder Querschnitt soll von dieser Ebene nach einer Querschnittshauptachse geschnitten werden. Dann bleibt die Mittellinie jedenfalls auch nach der Biegung noch eine ebene Kurve.

Die Schubkraft hatte schon beim geraden Stabe nur geringen Einfluß auf die Formänderung. Beim gekrümmten Stabe ist dieser Einfluß in der Regel noch viel geringer, weil bei den gewöhnlichen Anwendungsarten des „Bogenträgers“ die Schubkraft an sich viel kleiner bleibt, als bei einem Balken unter sonst ähnlichen Bedingungen. Es ist daher fast ausnahmslos zulässig, den Einfluß der Schubkraft auf die Formänderung zu vernachlässigen.

Eine gleichmäßig über den Querschnitt verteilte Normalspannung wird den Winkel zwischen zwei aufeinander folgenden Querschnitten etwas ändern; der Krümmungshalbmesser wird aber davon nicht berührt. Denn jede Faser des Stabelementes verkürzt oder verlängert sich proportional zu ihrer ursprünglichen Länge und nach der Formänderung schneiden sich die beiden aufeinander folgenden Querschnitte daher immer noch an derselben Stelle wie vorher (vgl. Abb. 43). Übrigens ist auch jene elastische Winkeländerung $\Delta d\varphi$ immer nur sehr klein im Verhältnisse zur ursprünglichen Größe $d\varphi$ des Winkels, denn man hat dafür

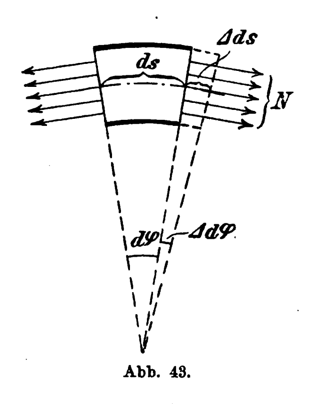


Abb. 43.

$$\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} = \frac{\Delta ds}{ds} = \frac{\sigma}{E}, \tag{110}$$

wobei Δds die elastische Längenänderung irgend einer Faser ds des Balkenelementes bezeichnet. In den praktisch vorkommenden Fällen ist das Verhältnis $\frac{\sigma}{E}$ höchstens etwa gleich $\frac{1}{2000}$, also auch $\Delta d\varphi$ unerheblich gegen $d\varphi$. Die durch die Momente hervorgebrachten Winkeländerungen sind im allgemeinen weit größer.

Bei der Berechnung von ϱ' brauchen wir also nur auf das Biegungsmoment M zu achten und selbst für die Berechnung von $\Delta d\varphi$ genügt dies in den meisten Fällen. Aus den weiteren Entwickelungen wird hervorgehen, in welchen Fällen es nötig ist, auch den Einfluß von N auf $\Delta d\varphi$ zu berücksichtigen.

Wir können jetzt zur Berechnung von ϱ' von dem Kunstgriffe Gebrauch machen, uns den Stab als einen ursprünglich geraden vorzustellen, der durch ein fingiertes Biegungsmoment M_f zuerst zum Krümmungsradius ϱ und dann noch weiter

durch das wirklich vorhandene Biegungsmoment M zum Krümmungsradius ϱ' gebogen wurde. Natürlich müssen wir dabei annehmen, daß diese ganze Biegung vorgenommen werden kann, ohne daß die Proportionalitätsgrenze überschritten wird. Diese Annahme ist indessen nicht bedenklich, so lange nur bei der Verbiegung von ϱ zu ϱ' keine Abweichung von dem Proportionalitätsgesetze vorkommt und so lange die Längen ds der einzelnen Fasern zwischen zwei aufeinander folgenden Querschnitten von vornherein nur wenig voneinander verschieden waren. Denn der Stab muß sich bei der wirklich mit ihm vorgenommenen Biegung dann ebenso verhalten, wie der andere ursprünglich gerade, den wir an seine Stelle setzen wollten und von dem wir immer voraussetzen können, daß die Proportionalitätsgrenze des Materials, aus dem er besteht, entsprechend hoch liegt, um ihn ohne deren Überschreitung sowohl zum Krümmungshalbmesser ϱ als zu ϱ' biegen zu können.

Durch diese Bemerkung wird die Aufgabe der Berechnung von ϱ' auf die in § 27 gelöste zurückgeführt. Die Anwendung von Gl. (75) auf die Belastungszustände M_f und $M_f + M$ liefert

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{M_f}{E\Theta} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\varrho'} = \frac{M_f + M}{E\Theta}.$$

Durch Elimination der Hilfsgröße M_f aus beiden Gleichungen erhalten wir die gesuchte Beziehung

$$\frac{1}{\varrho'} - \frac{1}{\varrho} = \frac{M}{E\Theta}. \tag{111}$$

Auch die durch das Biegungsmoment M bewirkte Verdrehung $\Delta d\varphi$ der beiden Querschnitte gegeneinander folgt auf demselben Wege aus Gl. (74) zu

$$\Delta d\varphi = ds \frac{M}{E\Theta}, \tag{112}$$

wenn unter ds der Abstand beider Querschnitte, längs der neutralen Faser gemessen, verstanden wird.

In den Gleichungen (111) und (112) muß man übrigens,

wie aus ihrer Ableitung hervorgeht, dem Biegungsmomente M das positive Vorzeichen geben, wenn es in demselben Sinne wirkt, wie M_f, d. h. wenn es die ursprünglich schon vorhandene Krümmung zu vergrößern sucht. Wirkt dagegen ein nach anderen Festsetzungen positiv gerechnetes Biegungsmoment M tatsächlich auf eine Verminderung der Krümmung hin, so muß man bei der Benutzung der vorstehenden Gleichungen vorher auf der rechten Seite noch ein Minuszeichen beisetzen.

Die Differentialgleichung der elastischen Linie läßt sich hier freilich im allgemeinen nicht mit übernehmen. Nur in einem Falle, nämlich dann, wenn die Stabmittellinie im spannungslosen Zustande einen Kreisbogen bildet, kann man für Formänderungen, die nur unerhebliche Verschiebungen der zur Mittellinie gehörigen Punkte mit sich bringen, eine Gleichung aufstellen, die der Differentialgleichung (76) für den geraden Stab, nämlich

$$E\Theta \frac{d^2y}{dx^2} = -M$$

entspricht und von der man einen ähnlichen Gebrauch machen kann, wie von dieser. — In Abb. 44 sei AB ein Stück der kreisförmigen Stabachse im ursprünglichen Zustande und AC die Gestalt dieses Stückes nach der Formänderung. Wir denken uns die Gleichung der Kurve AC in Polarkoordinaten, also in der Form

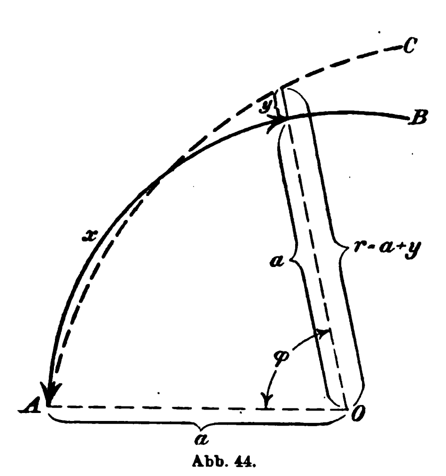


Abb. 44.

$$r = f(\varphi)$$

angegeben. Für den Krümmungshalbmesser der Kurve, der mit ϱ' bezeichnet werden soll, wird in der analytischen Geometrie der Ausdruck

$$\varrho' = \frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\varphi^2}}$$

abgeleitet. Setzt man hier $r = a + y$, beachtet, daß y sehr klein gegen a sein soll und vernachlässigt im Zähler und Nenner die von der zweiten Ordnung kleinen Glieder, so erhält man zunächst

$$\frac{1}{\varrho'} = \frac{a^2 + 2ay - a\frac{d^2y}{d\varphi^2}}{a^3 + 3a^2y}$$

und hieraus weiter

$$\frac{1}{\varrho'} - \frac{1}{a} = \frac{-y - \frac{d^2y}{d\varphi^2}}{a^2 + 3ay}.$$

Im Nenner kann nachträglich auch noch das von der ersten Ordnung kleine Glied $3ay$ gegen a^2 gestrichen werden. Mit Rücksicht auf Gl. (111) erhält man daher

$$E\Theta\left(\frac{d^2y}{d\varphi^2} + y\right) = \pm a^2 M. \tag{113}$$

Die Wahl des oberen oder unteren Vorzeichens auf der rechten Seite kann erst nachtäglich auf Grund der Festsetzungen über jene Richtungen, die als positiv gelten sollen, getroffen werden, ganz ähnlich wie schon früher bei der Differentialgleichung der elastischen Linie des geraden Stabes.

Versteht man unter $x = a\varphi$ (vgl. Abb. 44) die Länge des zum Zentriwinkel φ gehörigen Kreisbogens, so läßt sich die vorhergehende Gleichung auch in der Form

$$E\Theta\left(\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{y}{a^2}\right) = \pm M \tag{114}$$

anschreiben, die mit $a = \infty$ sofort in die Gleichung der elastischen Linie des geraden Stabes übergeht. Überhaupt darf das zweite Glied in der Klammer gegen das erste stets vernachlässigt werden, wenn sich die Ausbiegung nur auf einen kleinen Teil des Kreisumfanges erstreckt. Im anderen Falle muß es aber beibehalten werden, weil bei gleichen Werten

von dy/dx und d^2y/dx^2 die Ordinaten y um so größer ausfallen, je größer die Abszissen x im Vergleiche zu a werden. Namentlich dann, wenn es sich um die Untersuchung der Formänderung eines in sich zusammenhängenden Ringes handelt, würde die Vernachlässigung des zweiten Gliedes in der Klammer gegen das erste zu einem sehr merklichen Fehler führen.

Wir haben ferner beim schwach gekrümmten Stabe ebensoviel Grund als beim ursprünglich geraden Stabe zu der Vermutung, daß die Spannungsverteilung mindestens näherungsweise dem Geradliniengesetze entspricht und können daher die Formeln für die Spannungen, die durch die äußeren Kräfte hervorgerufen werden, ohne jede Änderung aus den früheren Betrachtungen über die Biegung des geraden Stabes übernehmen.

§ 37. Der Bogen mit zwei Gelenken.

Ein Stab von gekrümmter Mittellinie stütze sich an beiden Enden auf zwei Zapfen, um die er sich frei drehen kann. Man soll die Auflagerkräfte berechnen, die von diesen Zapfen aufgenommen werden, wenn beliebig gegebene Lasten an dem Stabe angreifen. Die Aufgabe ist einfach statisch unbestimmt, da jeder Auflagerdruck erst durch zwei Komponenten völlig bestimmt ist, während die Statik starrer Körper nur drei Gleichgewichtsbedingungen zur Verfügung stellt.

Die Zapfen, auf die sich der Bogen stützt, bezeichnet man als Gelenke; bei der Berechnung treten sie nur als Punkte auf, unter denen man sich die Zapfenmittelpunkte zu denken hat. Der Bogen mit zwei Gelenken kommt in der Praxis namentlich als Brückenträger vor (heute freilich seltener als früher, da man jetzt den Fachwerkträgern vor den vollwandigen Konstruktionen den Vorzug zu geben pflegt). Da er nur auf Grund der Elastizitätstheorie berechnet werden kann, wird er auch häufig als „elastischer Bogenträger“ bezeichnet. Abb. 45 zeigt die übliche Anordnung: beide Gelenke liegen in gleicher Höhe und der Bogen nimmt nur senkrecht gerichtete Lasten auf. Die senkrechten Komponenten beider Auflagerkräfte

können in diesem Falle ohne weiteres mit Hilfe von Momentengleichungen für die Gelenke als Momentenpunkte berechnet werden; sie sind ebenso groß als die Auflagerkräfte eines Balkens, der dieselben Lasten trägt. Dazu tritt aber noch die Horizontalkomponente jedes Auflagerdrucks, von der man nach den

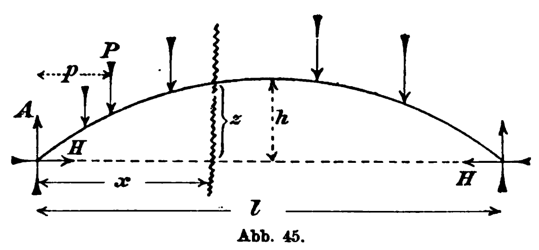


Abb. 45.

allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen nur aussagen kann, daß sie an beiden Gelenken gleich groß, aber entgegengesetzt gerichtet sein muß. Die Größe dieser Horizontalkomponente bezeichnet man als den Horizontalschub H des Bogens; dieser bildet die statisch unbestimmte Größe, auf deren Ermittelung es vor allen Dingen ankommt. Denn man sieht ein, daß die Biegungsmomente, die Schub- und die Normalkräfte für alle Querschnitte und daher auch die Spannungen an allen Stellen sofort angegeben werden können, wenn H bekannt ist. Wir können uns daher hier darauf beschränken, die Berechnung von H auseinander zu setzen.

Diese Aufgabe soll zunächst auf Grund des Satzes von der kleinsten Formänderungsarbeit gelöst werden. Wenn die zur Abszisse x gehörige Ordinate der Stabmittellinie mit z bezeichnet wird, hat man für das Biegungsmoment im Querschnitte x

$$M = M_b - Hz. \tag{115}$$

Hierbei ist das Biegungsmoment, das ein Balkenträger bei derselben Belastung im Querschnitte x aufzunehmen hätte, zur Abkürzung mit M_b bezeichnet, d. h. M_b ist ein Ausdruck von der Form

$$M_b = Ax - \sum_0^x P(x - p),$$

also bei gegebenen Lasten eine bekannte Größe. Die dem

Biegungsmomente M im Bogenelemente entsprechende Formänderungsarbeit kann nach Gl. (87) berechnet werden, wenn man darin dx durch ds ersetzt, denn für die Verdrehung der benachbarten Querschnitte gegeneinander gilt beim Bogen dieselbe Formel wie beim geraden Stabe. Vernachlässigt man neben dieser Formänderungsarbeit die durch die achsiale Belastung N und die durch die Schubkraft hervorgerufene, so wird für den ganzen Bogen

$$A = \frac{1}{2}\int \frac{M^2}{E\Theta} ds = \frac{1}{2}\int \frac{(M_b - Hz)^2}{E\Theta} ds, \qquad (116)$$

worin die Integration über die ganze Bogenlänge auszudehnen ist.

Wir bilden den Differentialquotienten dieses Ausdrucks nach der statisch unbestimmten Größe H und setzen ihn gleich Null. Dies liefert

$$\frac{\partial A}{\partial H} = -\int \frac{M_b - Hz}{E\Theta} z ds = -\int \frac{M_b z}{E\Theta} ds + H\int \frac{z^2}{E\Theta} ds = 0,$$

und durch Auflösen der Gleichung nach der Unbekannten H finden wir

$$H = \frac{\int \frac{M_b z}{E\Theta} ds}{\int \frac{z^2}{E\Theta} ds}. \qquad (117)$$

Der Elastizitätsmodul E kann fast in allen Fällen, die überhaupt vorkommen, als konstant über die ganze Bogenlänge angesehen werden. Für den besonderen Fall, daß außerdem auch das Trägheitsmoment des Querschnitts überall dieselbe Größe hat, vereinfacht sich Gl. (117) zu

$$H = \frac{\int M_b z\, ds}{\int z^2 ds}. \qquad (118)$$

Die Integrale in diesen Formeln können immer ohne Schwierigkeit berechnet werden, sei es durch gewöhnliche Integration, sei es durch eine mechanische Quadratur. Im wesentlichen ist also die Aufgabe hiermit als gelöst zu betrachten.

Wir wollen diese Formeln jetzt auf ein einfaches Beispiel anwenden. Die Bogenmittellinie sei ein Parabelbogen, und die Belastung sei über die ganze Spannweite gleichförmig verteilt, d. h. so, daß zu Bogenabschnitten von gleicher Horizontalprojektion gleiche Lasten gehören. Dieser Fall hat übrigens eine allgemeinere Bedeutung, als es nach dem Wortlaute der Aufstellung scheinen könnte. Jeder flache Bogen von symmetrischer Gestalt kommt nämlich dem Parabelbogen nahe, z. B. auch ein flacher Kreisbogen. Näherungsweise kann daher jeder flache Bogen als ein Parabelbogen aufgefaßt werden und man macht davon bei solchen Berechnungen mit Vorliebe Gebrauch, weil sich die Ausführung der Rechnung beim Parabelbogen am einfachsten gestaltet.

Bei gleichförmiger Belastung ist das Biegungsmoment M_b eines Balkens im Abstande x vom linken Auflager

$$M_b = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2}$$

und die Momentenfläche ist selbst eine Parabel, die bei geeigneter Wahl des Maßstabes, in dem M_b aufgetragen wird, zum Zusammenfallen mit der Bogenmittellinie gebracht werden kann. In der Mitte geht M_b in $\frac{ql^2}{8}$ und z in die Pfeilhöhe h des Bogens über, daher kann auch überall

$$M_b = \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{z}{h}$$

gesetzt werden. Führt man dies in Gl. (118) ein, so erhält man

$$H = \frac{ql^2}{8h}, \tag{119}$$

da sich der Nenner gegen den ihm gleichen Faktor des Zählers weghebt.

Mit diesen Werten von M_b und H wird die Formänderungsarbeit A, wie aus Gl. (116) hervorgeht, zu Null. Wenn überhaupt der Wert Null für die Formänderungsarbeit bei passender Wahl der statisch unbestimmten Größe möglich ist, entspricht er immer einem Minimum, da A niemals negativ

werden kann. Wir hätten daher auch schon auf Grund dieser einfachen Überlegung den Wert von H bestimmen können. Zugleich werden wir aber hierdurch aufmerksam darauf, daß die Gl. (118) oder (117) nicht den genauen Wert von H liefern können, denn eine kleine Formänderung wird beim Aufbringen von Lasten auf einen elastischen Körper immer eintreten und A wird also nicht genau gleich Null sein können.

Der Grund für den Widerspruch liegt darin, daß wir bei der Berechnung von A nur auf die Arbeitsleistung durch die Biegungsmomente Rücksicht genommen haben. Um zu genaueren Resultaten zu gelangen, muß auch auf die Arbeitsleistung der Normalkraft N Rücksicht genommen werden. Die Arbeit der Schubspannungen kann dagegen, wenn man auf Kleinigkeiten nicht zu achten braucht, immer noch vernachlässigt werden, und zwar mit viel größerem Rechte als beim Balkenträger, weil beim Bogen die Schubkräfte an sich viel geringer ausfallen als beim Balken. Wenn man will, kann man indessen auch dieses Glied, gerade so wie es früher beim Balken gezeigt wurde, in Ansatz bringen; da es praktisch ganz bedeutungslos ist, sehe ich aber hier davon ab.

Eine über den Querschnitt F gleichförmig verteilte Normalspannung σ von der Größe

$$\sigma = \frac{N}{F}$$

leistet beim Zusammendrücken des Bogenelementes ds eine Arbeit, die auf die Volumeneinheit bezogen nach Gl. (39)

$$\mathsf{A} = \frac{\sigma^2}{2E}$$

gesetzt werden kann. Multipliziert man dies mit dem Volumen Fds des Bogenelementes, so findet man

$$dA = \frac{\sigma^2 F}{2E}\, ds = \frac{N^2}{2EF}\, ds.$$

Nachdem diese Formänderung vollzogen ist, denken wir uns das Biegungsmoment zur Wirksamkeit gebracht. Dabei dreht sich der eine Querschnitt relativ zum anderen um eine

durch den Schwerpunkt gehende Achse. Dabei verschieben sich auch die Angriffspunkte der schon vorher angebrachten Normalspannungen $\sigma = \frac{N}{F}$ von neuem und wir müssen zunächst berechnen, wie groß die bei dieser Drehung von ihnen geleistete Arbeit ist. Für ein Flächenelement dF im Abstande y von der Schwerlinie ist die Verschiebung des Angriffspunktes der an ihm von Anfang an wirkenden Normalspannung gleich

$$y \Delta d\varphi$$

und die gesamte Arbeitsleistung dieser Normalspannungen daher gleich

$$\int \sigma \, dF \, y \Delta d\varphi = \frac{N \Delta d\varphi}{F} \int y dF.$$

Nach der Eigenschaft der Schwerlinie ist aber das letzte Integral gleich Null. Im ganzen genommen leisten daher die schon vorher in gleichförmiger Verteilung aufgebrachten Normalspannungen während der Drehung keine Arbeit; es bleiben also nur die Arbeitsleistungen der durch das Biegungsmoment selbst hervorgerufenen Normalspannungen bei dieser Bewegung übrig und diese sind ebenso groß, als wenn zu Beginn ihres Auftretens das Trägerelement spannungslos gewesen wäre.

Auch umgekehrt könnte man zeigen, daß die vom Biegungsmomente für sich hervorgerufenen Spannungen keine Arbeit mehr leisten, wenn nach ihnen die Normalkraft N angebracht wird. Jedenfalls kann also die durch das Zusammenwirken von M und N geleistete Formänderungsarbeit gleich der Summe der beiden Ausdrücke gesetzt werden, die für M und N für sich gefunden wurden. An Stelle von Gl. (116) schreiben wir daher jetzt

$$A = \tfrac{1}{2} \int \frac{M^2}{E\Theta} ds + \tfrac{1}{2} \int \frac{N^2}{EF} ds.$$

Wenn wir jetzt dieselbe Rechnung wiederholen, die zu Gl. (117) führte, erhalten wir

$$\frac{\partial A}{\partial H} = -\int \frac{M_b z}{E\Theta} ds + H \int \frac{z^2}{E\Theta} ds + \int \frac{N}{EF} \cdot \frac{\partial N}{\partial H} ds = 0.$$

Hier ist noch N als Funktion von H auszudrücken, was leicht geschehen kann. Um langwierige Formeln zu vermeiden, von denen man später doch keinen Gebrauch macht, weise ich darauf hin, daß bei einem sehr flachen Bogen, für den diese Rechnung hauptsächlich von Wichtigkeit ist, weil bei ihm der Horizontalschub H und daher N besonders groß ausfällt, nahezu $N = H$ gesetzt werden kann. Mit dieser Vereinfachung erhält man

$$\frac{\partial N}{\partial H} = 1$$

und die Auflösung der vorigen Gleichung liefert

$$H = \frac{\int \frac{M_b z}{E\Theta} ds}{\int \frac{z^2}{E\Theta} ds + \int \frac{ds}{EF}}. \tag{120}$$

Wenn neben E auch Θ und F als konstant angesehen werden können, vereinfacht sich dies noch weiter zu

$$H = \frac{\int M_b z\, ds}{\int (z^2 + i^2) ds} \tag{121}$$

Unter i ist der Trägheitshalbmesser des Querschnitts, unter i^2 also $\frac{\Theta}{F}$ zu verstehen. Der Vergleich dieser Formel mit Gl. (118) zeigt uns nun auch, welchen Einfluß die Berücksichtigung der Normalspannungen neben den Biegungsmomenten auf den Wert von H ausübt. So lange i klein gegen den Durchschnittswert der Ordinaten z ist, unterscheiden sich die beiden Werte von H nach (118) und nach (121) nur unerheblich voneinander. Dieser Fall liegt gewöhnlich vor und man kann dann unbedenklich die einfachere Formel zur Berechnung des Horizontalschubs verwenden.

§ 38. Zweites Verfahren zur Berechnung des Horizontalschubs.

Die Wichtigkeit dieser Untersuchungen für viele praktische Anwendungen macht es wünschenswert, noch einen zweiten, von dem vorigen völlig verschiedenen Weg zur Lösung derselben Aufgabe zu kennen.

Ich denke mir den Bogen platt auf den Boden gelegt, das linke Ende festgehalten und ein Element von der Länge ds zum neuen Krümmungsradius verbogen, während alle übrigen Teile des Bogens inzwischen ihre Gestalt behalten sollen. Der rechte Teil des Bogens dreht sich dann gegen den festgehaltenen linken um den Winkel $\Delta d\varphi$ und jeder zu ihm gehörige Punkt beschreibt einen kleinen Kreisbogen von diesem Zentriwinkel um den Mittelpunkt von ds. Der Radius des Kreisbogens, den das rechte Bogenende beschreibt, ist in Abb. 46, in der die neue Lage des rechten Bogenstücks durch eine punktierte Linie (natürlich sehr stark übertrieben) eingetragen ist, mit w bezeichnet. Die Länge des Kreisbogens ist daher gleich $w\Delta d\varphi$ zu setzen. Um nun zu erkennen, um wieviel sich die Sehne des ganzen Bogens durch die an ds vorgenommene Verbiegung vergrößert hat, denke ich mir nachträglich den ganzen Bogen ohne Formänderung um den linken Endpunkt so lange gedreht, bis der rechte Endpunkt wieder auf die frühere horizontale Linie fällt. Die beiden nacheinander erfolgten kleinen Wege des rechten Endpunktes bilden die Hypotenuse und die eine Kathete eines unendlich kleinen Dreiecks, dessen zweite Kathete die gesuchte Sehnenverlängerung $d\Delta l$ angibt. In diesem Dreiecke ist ein Winkel gleich dem Winkel α, den der Radius w mit der vertikalen Richtung einschließt. Man hat also

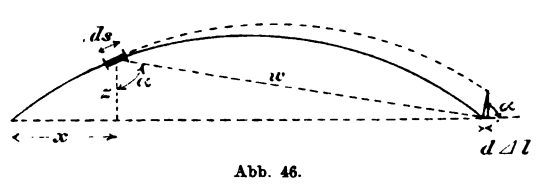


Abb. 46.

$$d\Delta l = w\Delta d\varphi \cos\alpha = z\Delta d\varphi.$$

Dieselbe Betrachtung gilt auch für die Verbiegung jedes anderen Bogenelementes, und die dabei auftretenden Änderungen der Bogensehne oder der Spannweite l addieren sich zueinander algebraisch. Die ganze elastische Spannweitenänderung ist daher

$$\Delta l = \int z\Delta d\varphi = \int \frac{Mz}{E\Theta} ds. \tag{122}$$

Hierbei ist nur der Einfluß der Biegungsmomente berücksichtigt. Als verhältnismäßig unbedeutendes Korrektionsglied kann man nachträglich noch die durch die Normalkräfte N bewirkte Spannweitenänderung hinzufügen. Bei flachen Bögen genügt es, diese etwa gleich

$$\frac{lH}{EF}$$

zu setzen. Dieses Glied ist natürlich negativ, da ein Horizontalschub den Bogen verkürzt; dagegen ist Δl in Gl. (122) positiv, wenn M positiv ist, denn ein Biegungsmoment, das wir positiv nennen, biegt einen Balken nach unten hin konvex und vermindert bei dem Bogen die ursprüngliche Krümmung, streckt also den Bogen gerade und vergrößert dabei die Bogensehne.

Bei den Formänderungen, die der Bogen in Wirklichkeit ausführt, bleibt die Spannweite unverändert; wir haben also dafür die Bedingungsgleichung

$$\int \frac{Mz}{E\Theta} ds - \frac{lH}{EF} = 0.$$

Setzt man hier noch den Wert von M aus Gl. (115) ein und löst nach H auf, so wird man wieder auf die früheren Formeln für H geführt, nämlich auf Gl. (117), wenn man das zweite Glied vernachlässigt, oder mit dessen Berücksichtigung auf Gl. (120). Daß hier die Spannweite l an Stelle der Bogenlänge $\int ds$ steht, kommt nur von der willkürlichen, hier etwas abweichenden Schätzung des Korrektionsgliedes her, auf die es nicht ankommt.

Man kann die Sache auch so auffassen, daß der Bogen zuerst am rechten Ende auf ein horizontales Rollenlager gesetzt sei. Als Biegungsmoment bleibt dann nur M_b und die Bogensehne verlängert sich dabei um

$$\Delta l = \int \frac{M_b z}{E\Theta} ds.$$

Dann denkt man sich nachträglich eine Horizontalkraft H an dem beweglichen Auflager angebracht, die so groß gewählt

wird, daß dieses wieder um Δl zurückgeführt und der Bogen dadurch in seine endgültige Gestalt gebracht wird. Die Horizontalkraft H bringt negative Biegungsmomente von der Größe Hz hervor und zur Berechnung des dadurch bewirkten Δl kann Gl. (122) ebenfalls in der Form

$$\Delta l = -\int \frac{Hz^2}{E\Theta} ds,$$

benutzt werden. Wenn es für nötig gehalten wird, kann dazu die Verkürzung durch die achsiale Belastung gefügt werden. Durch Gleichsetzen der Werte von Δl kommt man wieder auf die früheren Resultate.

Diese Betrachtungsweise hat vor der Benutzung des Satzes von der Formänderungsarbeit den Vorzug, daß sie anschaulicher ist und einen unmittelbaren Einblick in den physikalischen Sinn gewährt, der den einzelnen in der Rechnung vorkommenden Gliedern beizulegen ist. Bei der Methode von Castigliano verfährt man mehr summarisch, man verzichtet auf einen Überblick über die Bedeutung der einzelnen Glieder, erlangt aber andererseits dadurch den Vorteil, daß man ganz von selbst zu dem richtigen Resultate geführt wird, ohne sich über den Vorgang in allen Einzelheiten Rechenschaft geben zu müssen. Jedes Verfahren hat also seine Vorzüge und man tut daher gut, sich mit beiden vertraut zu machen und nicht das eine einseitig vor dem anderen zu bevorzugen.

§ 39. Einfluß von Temperaturänderungen.

Bei einem statisch bestimmten Träger sind Temperaturänderungen ohne Einfluß auf die Spannungen. Denn die Auflagerkräfte können bei ihm auf Grund der allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen berechnet werden und sie sind daher immer gleich Null, wenn keine Lasten an dem Träger angreifen, gleichgültig welche Temperaturänderungen der Träger erfahren mag. Beim Fehlen aller äußeren Kräfte müssen daher auch innerhalb jedes Querschnitts alle etwa vorkommenden Spannungen unter sich ein Gleichgewichtssystem miteinander bilden und dies führt nach der Voraussetzung der linearen Spannungsverteilung zu dem Schlusse, daß sie überall gleich Null sind.

Bei ungleichförmiger Erwärmung eines Körpers kann es freilich vorkommen, daß eine von der linearen abweichende Spannungsverteilung auftritt und der Schluß, daß die Spannungen beim Fehlen äußerer Kräfte überall verschwinden müßten, ist dann nicht mehr zulässig. Dahin gehören auch die sogenannten Gußspannungen, die in Gußstücken vorkommen, die sich nach dem Gusse ungleichmäßig abgekühlt haben, so daß einzelne Teile schon erstarrten, während andere noch flüssig waren. Unter Umständen erreichen diese Gußspannungen, ohne daß irgend eine Belastung von dem Gußstücke aufgenommen würde, eine Höhe, die bis nahe an die Festigkeitsgrenze heranreicht, so daß eine geringfügige äußere Veranlassung genügt, den Bruch herbeizuführen. Durch nochmaliges Ausglühen können sie beseitigt oder wenigstens vermindert werden; auch eine häufig wiederholte Beanspruchung wirkt, wie neuere Versuche gelehrt haben, in ähnlichem Sinne.

Von solchen Fällen soll aber hier nicht die Rede sein. Wir nehmen vielmehr an, daß der Körper im ursprünglichen Zustande frei von solchen Spannungen war und daß auch nachher seine Temperatur sich überall gleichmäßig ändert und der Ausdehnungskoeffizient überall dieselbe Größe hat. Wenn keine äußeren Kräfte an dem Körper wirken, ist dann der Körper bei Wärmeschwankungen ähnlich veränderlich, d. h. in jedem Augenblicke ist seine Gestalt der ursprünglichen geometrisch ähnlich. Damit fällt auch jede Veranlassung für ein Auftreten von Spannungen fort.

Ein statisch unbestimmter Träger kann aber durch den Zwang der Auflagerbedingungen, die ihm vorgeschrieben sind, daran verhindert werden, sich gleichmäßig auszudehnen. Diese Verhinderung kann nur von Auflagerkräften ausgehen, die unabhängig von der Belastung auftreten. Die statisch unbestimmten Größen, die bei der Berechnung solcher Träger vorkommen, hängen dann nicht nur, wie bisher angenommen wurde, von den Belastungen, sondern auch von den Temperaturschwankungen ab.

In diesem Falle befindet sich auch der Bogen mit zwei

Gelenken. Wenn er erwärmt wird, kann er sich nicht geometrisch ähnlich ausdehnen, da die Bogensehne unveränderlich ist. Es wird also ein Horizontalschub entstehen, der sich der Vergrößerung der Spannweite widersetzt. Diese Auflagerkraft hat Biegungsmomente u. s. w. und damit Spannungen zur Folge, die zu den durch die Belastung hervorgerufenen hinzutreten. Diese Spannungen sind gewöhnlich so beträchtlich, daß sie bei der Festigkeitsberechnung nicht außer acht gelassen werden dürfen.

Zunächst muß man sich darüber klar werden, zwischen welchen Grenzen etwa Temperaturschwankungen zu erwarten sind. Bei Brückenträgern, die im Freien aufgestellt sind, nimmt man gewöhnlich an, daß die Temperatur nach oben oder unten um ungefähr 40° C. von der dem spannungslosen Zustande entsprechenden abweichen kann. Wenn der Träger statisch bestimmt wäre, würde sich, falls er aus Eisen besteht, jede Länge um $\frac{1}{2000}$ ändern. Bei einem Bogen mit zwei Gelenken von 50 m Spannweite hätte man also mit einer Spannweitenänderung Δl von 25 mm zu rechnen. Um diese wieder rückgängig zu machen, muß man einen Horizontalschub H anbringen, dessen Größe aus den Untersuchungen des vorigen Paragraphen ohne weiteres folgt. Ersetzen wir allgemein die Dehnung um $\frac{1}{2000}$ durch den Buchstaben η und berücksichtigen wir bei der durch H bewirkten Formänderung nur den Einfluß der Biegungsmomente, so folgt aus der Gleichung

$$\eta l = \int \frac{Hz^2}{E\Theta} ds$$

der durch die Temperaturänderung hervorgerufene Horizontalschub zu

$$H = \frac{\eta l}{\int \frac{z^2}{E\Theta} ds}. \tag{123}$$

Ähnlich ist natürlich auch der Einfluß eines etwaigen Nachgebens der Widerlager zu beurteilen.

Übrigens können die Werte der durch Temperaturschwankungen hervorgerufenen statisch unbestimmten Auflagerkräfte

auch nach der Methode von Castigliano leicht berechnet werden. Denkt man sich nämlich den Zwang an den Auflagerstellen, der die Übertragung dieser statisch unbestimmten Kräfte vermittelt, beseitigt, so ist der Träger statisch bestimmt und er kann sich bei den Temperaturänderungen geometrisch ähnlich verändern. Dabei wird sich der Angriffspunkt einer dieser Auflagerkomponenten, die etwa mit U bezeichnet werden mag, in deren Richtung um eine Strecke u verschieben, die wie bei dem vorher betrachteten Beispiele leicht berechnet werden kann, wenn η gegeben ist. Hierauf bringe man die Lasten und die statisch unbestimmten Kräfte U an, letztere in solcher Größe, daß die durch die vorausgehende Temperaturänderung hervorgerufenen Verschiebungen u wieder verschwinden. Nach Gl. (93) ist dann

$$\frac{\partial A}{\partial U} = -u \tag{124}$$

zu setzen. Diese Gleichung tritt hier an Stelle der Gleichung

$$\frac{\partial A}{\partial U} = 0,$$

die wir früher unter der Voraussetzung, daß keine Temperaturschwankungen vorkämen, zur Berechnung der U benutzten. Mit Gl. (124) und den entsprechenden für die übrigen statisch unbestimmten Größen ist aber nun genau so zu verfahren, wie früher; die Auflösung liefert die Unbekannten U. Übrigens kann unter U auch ein unbekanntes Kräftepaar (ein Einspannmoment) verstanden werden; dann bedeutet u die Winkeldrehung der Angriffsstelle, wenn der Träger statisch bestimmt gemacht wurde. Auch diese läßt sich in jedem Falle ohne weiteres für eine gegebene Temperaturänderung ermitteln.

Diese allgemeine Betrachtung sei gleichfalls an dem Beispiele des Bogens mit zwei Gelenken näher erläutert. Es genügt, wenn wir den Horizontalschub für den Fall berechnen, daß gar keine Lasten angreifen. Mit $U = H$ und $u = -\eta l$ schreibt sich Gl. (124)

$$\frac{\partial A}{\partial U} = \eta l.$$

Für A nehmen wir den in Gl. (116) angegebenen Wert, nachdem darin $M_b = 0$ gesetzt ist. Wir erhalten

$$\frac{\partial A}{\partial H} = H\int\frac{z^2}{E\Theta}ds = \eta l,$$

woraus für H wieder derselbe Wert wie in Gl. (123) gefunden wird.

§ 40. Der beiderseits eingespannte Bogen.

Dieser ist dreifach statisch unbestimmt: Wir wählen als Unbekannten U die vertikale Auflagerkomponente B, den Horizontalschub H und das Einspannmoment M_0, alle drei für das linke Auflager. Von der Berücksichtigung des Einflusses der Normalkräfte auf die Formänderung wollen wir der Einfachheit halber absehen. Für das Biegungsmoment M im Querschnitte x erhalten wir, wenn wir im übrigen die früheren Bezeichnungen beibehalten,

$$M = M_0 + Bx - Hz - \sum_0^x P(x-p),$$

also z. B. für eine gleichförmige Belastung des Bogens

$$M = M_0 + Bx - Hz - \frac{qx^2}{2}.$$

Wir bilden jetzt

$$A = \frac{1}{2}\int\frac{M^2}{E\Theta}ds$$

und setzen die drei partiellen Differentialquotienten nach M_0, B und H gleich Null. Dies liefert

$$\frac{\partial A}{\partial M_0} = \int\frac{M}{E\Theta}\cdot\frac{\partial M}{\partial M_0}ds = \int\frac{M}{E\Theta}ds = 0,$$

$$\frac{\partial A}{\partial B} = \int\frac{M}{E\Theta}\cdot\frac{\partial M}{\partial B}ds = \int\frac{Mx}{E\Theta}ds = 0,$$

$$\frac{\partial A}{\partial H} = \int\frac{M}{E\Theta}\cdot\frac{\partial M}{\partial H}ds = -\int\frac{Mz}{E\Theta}ds = 0.$$

Nach Einsetzen von M können diese drei Gleichungen ohne weiteres nach den drei Unbekannten aufgelöst werden, so daß in dieser Lösung nur noch Integrale vorkommen, die mindestens auf mechanischem Wege stets leicht berechnet werden können.

Um zu untersuchen, welche Werte von M_0, B, H einer Temperaturänderung entsprechen, beachte man, daß beim Freigeben des linken Bogenendes (falls beide Auflager in gleicher Höhe liegen) nur der Angriffspunkt von H eine Verschiebung in der Kraftrichtung erfährt. Man hat daher hierfür die drei Gleichungen

$$\int \frac{M}{E\Theta} ds = 0, \quad \int \frac{Mx}{E\Theta} ds = 0, \quad \int \frac{Mz}{E\Theta} ds = -\eta l,$$

in denen für M der Wert

$$M = M_0 + Bx - Hz$$

einzusetzen ist. Nachdem dies geschehen ist, können die drei Gleichungen wiederum leicht nach M_0, B und H aufgelöst werden.

Als beiderseits eingespannter elastischer Bogenträger ist ein Tonnengewölbe aufzufassen, das aus einem Materiale aufgeführt ist, von dem man annehmen kann, daß es wenigstens näherungsweise dem Hookeschen Gesetze gehorcht. Die Lehre von den Gewölben behandle ich in der graphischen Statik und ich begnüge mich daher hier mit diesen kurzen Andeutungen.

§ 41. Berechnung eines Ringes oder einer Röhre auf Druck oder Zug in einer Durchmesserebene.

In Abb. 47 ist ein Körper von ringförmiger Gestalt dargestellt, der zwischen zwei Platten in der Richtung des senkrechten Durchmessers mit der Kraft P zusammengedrückt wird. Auf diese Art wird z. B. ein zur Entwässerung in einen Straßenkörper eingelegtes Tonrohr beansprucht, wenn ein Wagen darüber wegfährt. An Stelle des Druckes kann auch ein Zug treten, ohne daß sich die Sache wesentlich änderte. In dieser Lage befindet sich ein Kettenglied von kreisrunder Gestalt bei einer Belastung der Kette. Alle Formänderungen und alle Spannungen sind gleich groß, aber von entgegengesetztem Wirkungssinne, als wenn der Ring mit einer ebenso großen Kraft zusammengedrückt würde. Es genügt daher, wenn wir immer nur von diesem Falle reden; der andere ist dadurch zugleich mit erledigt.

Es genügt, die Formänderung eines einzigen Quadranten zu betrachten, da die drei übrigen alle in der gleichen Lage sind; ich wähle dazu den in der Abbildung nach links oben hin gelegenen. Wenn ich diesen Quadranten aus dem ganzen Ringe loslöse, muß ich an den beiden Schnittstellen äußere Kräfte anbringen, die die vorher dort übertragenen Spannungen ersetzen. In der horizontalen Schnittfläche kann ich mir alle dort übertragenen Spannungen zu einer durch den Schwerpunkt des Querschnitts gehenden Resultierenden und einem resultierenden Kräftepaare zusammengesetzt denken. Die Resultierende muß aus Symmetriegründen rechtwinklig zum Querschnitte stehen. Die untere und die obere Ringhälfte, die dort aneinander stoßen, befinden sich nämlich in genau gleichen Umständen; der zwischen ihnen übertragene Druck und Gegendruck muß daher gegen die eine ebenso liegen, wie gegen die andere und das ist nur möglich, wenn der Winkel ein rechter ist. Aus dem Gleichgewichte der einen Ringhälfte für sich betrachtet, folgt ferner, daß der in jeder horizontalen Schnittfläche übertragene Druck gleich $\frac{P}{2}$ ist. Das unbekannte Moment der Spannungen im Anfangsquerschnitte sei mit M_0 bezeichnet.

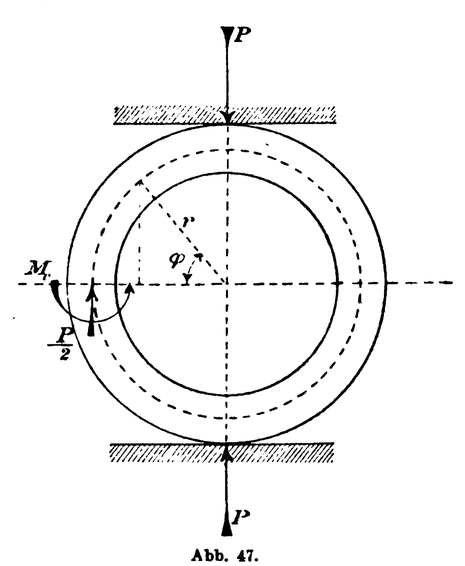


Abb. 47.

Für irgend einen Querschnitt des Quadranten, dessen Ebene mit der horizontalen Richtung den Winkel φ bildet, hat man das Biegungsmoment, also das Moment der links vom Querschnitte liegenden äußeren Kräfte, die am Quadranten wirken,

$$M = M_0 + \frac{P}{2}(r - r \cos \varphi),$$

denn das Anfangsmoment M_0 behält für jeden neuen Momentenpunkt den ursprünglichen Wert. Auch die Normalkraft N für den Querschnitt φ läßt sich leicht angeben; man hat dafür

$$N = \frac{P}{2} \cos \varphi .$$

Zunächst soll aber nur auf den Einfluß der Biegungsmomente auf die Formänderung geachtet werden, da dieser, wie gewöhnlich bei solchen Aufgaben, erheblich überwiegt, so daß es in der Regel genügt, ihn bei der Durchführung der Rechnung ausschließlich zu beachten.

Die Bedingung, der die Formänderung hier unterworfen ist, besteht darin, daß die beiden Schnittflächen des Quadranten immer senkrecht zueinander bleiben müssen. Allgemein gehört nämlich der ganze Umfang der Mittellinie zu einem Zentriwinkel von 360^0 und dieser Winkel kann sich nicht ändern, so lange die Mittellinie fortfährt, eine in sich zurückkehrende Kurve zu bilden, so lange also kein Bruch erfolgt. Da nun hier der Ring in vier sich ganz gleich verhaltende Quadranten zerfällt, kann sich auch der zu einem dieser Quadranten gehörige Zentriwinkel nicht ändern. Die Bedingungsgleichung, die zur Ermittelung der einzigen unbekannten Größe M_0 führt, lautet daher ganz einfach

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Delta d\varphi = 0 .$$

Man braucht nur für $\Delta d\varphi$ seinen Wert

$$\Delta d\varphi = \frac{M ds}{E\Theta} = \frac{\left(M_0 + \frac{Pr}{2} - \frac{Pr}{2} \cos \varphi\right) r d\varphi}{E\Theta}$$

einzusetzen und zu integrieren. Da E und Θ konstant sind, kann man diese Faktoren streichen, ebenso den konstanten Faktor r im Zähler; es bleibt also

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(M_0 + \frac{Pr}{2} - \frac{Pr}{2}\cos\varphi\right)d\varphi = M_0\frac{\pi}{2} + \frac{Pr\pi}{4} - \frac{Pr}{2} = 0$$

und durch Auflösen erhält man

$$M_0 = -\frac{\pi - 2}{2\pi}Pr = -0{,}182\,Pr.$$

Am Ende des horizontalen Durchmessers ist das Biegungsmoment demnach negativ, d. h. es bringt eine stärkere Krümmung hervor. Dies war auch schon auf Grund der oberflächlichsten Betrachtung zu erwarten und wir können auf Grund derselben Betrachtung des ganzen Vorganges sofort voraussagen, daß das Moment im Scheitel positiv werden muß, also eine Verminderung der Krümmung an dieser Stelle bewirkt. Auch in Abb. 47 ist übrigens der Drehpfeil von M_0 für den betrachteten Quadranten in Voraussicht dieses Resultates schon entgegengesetzt dem Uhrzeigersinne eingetragen worden.

Das andere Glied in dem Ausdrucke für M ist bei jedem weiteren Querschnitte des Quadranten positiv; demnach ist M_0 zugleich das größte Biegungsmoment von negativem Vorzeichen. Das größte positive Moment muß dagegen im Scheitel eintreten. Mit $\varphi = \frac{\pi}{2}$ geht M, das wir dann mit $M_{\frac{\pi}{2}}$ bezeichnen, über in

$$M_{\frac{\pi}{2}} = \frac{Pr}{\pi} = 0{,}318\,Pr.$$

Im Scheitel tritt also zugleich das absolut größte Moment und damit die größte Beanspruchung des Materials auf. Die Spannung σ läßt sich daraus sofort berechnen. Wenn der ringförmige Körper z. B. ein Rohr von der überall gleichen Wandstärke h und der Länge l ist, bildet der Querschnitt ein Rechteck vom Widerstandsmomente $\frac{lh^2}{6}$ und für σ erhält man

$$\sigma = \frac{6\,Pr}{\pi l h^2}. \qquad (125)$$

Wenn der Einfluß der Normalkraft N auf die Formänderung nicht zu vernachlässigen ist, hat man nach Gl. (110)

$$\varDelta d\varphi = \frac{N}{EF} d\varphi + \frac{M r d\varphi}{E\Theta}$$

oder nach Einsetzen der Werte von N und M

$$\varDelta d\varphi = \left\{ \frac{P}{2EF} \cos\varphi + \frac{M_0 r}{E\Theta} + \frac{P}{2E\Theta}(r - r\cos\varphi) r \right\} d\varphi.$$

Integriert man dies zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ und setzt das Integral gleich Null, so erhält man

$$\frac{P}{2EF} + \frac{M_0 r}{E\Theta} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{Pr^2}{2E\Theta} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{Pr^2}{2E\Theta} = 0$$

und hieraus durch Auflösen nach M_0

$$M_0 = -\left(Pr\frac{\pi - 2}{2\pi} + \frac{Pi^2}{\pi r} \right)$$

wenn man mit i den Trägheitsradius des Querschnitts bezeichnet. Speziell für den rechteckigen Querschnitt des Rohres ist $i^2 = \frac{h^2}{12}$ und hiermit

$$M_0 = -Pr\left(\frac{\pi - 2}{2\pi} + \frac{h^2}{12 r^2 \pi} \right).$$

Das zur Berücksichtigung des Einflusses der Normalspannungen gegen früher hinzugetretene letzte Glied der Klammer ist nur dann von merklicher Größe, wenn die Wandstärke der Röhre ziemlich groß gegen den lichten Durchmesser ist.

Für das Moment im Scheitel findet man

$$M_{\frac{\pi}{2}} = M_0 + \frac{Pr}{2} = \frac{Pr}{\pi}\left(1 - \frac{h^2}{12 r^2}\right). \tag{126}$$

Auf das Moment im Scheitel kommt es bei der Festigkeitsberechnung an. Dieses wird etwas geringer, als wir es bei der vorausgehenden einfacheren Betrachtung fanden, d. h. das Rohr kann etwas mehr Druck aushalten, als es nach Gl. (125) scheinen könnte. Diese Gleichung ist vielmehr ebenfalls, wenn man genauer rechnen will, durch

$$\sigma = \frac{6Pr}{\pi l h^2}\left(1 - \frac{h^2}{12 r^2}\right) \tag{127}$$

zu ersetzen. Mit $h = \frac{r}{5}$ macht indessen das Korrektionsglied

nur $^1/_8$ % aus und ist daher zu vernachlässigen. Erst bei ganz dickwandigen Röhren kommt es in Betracht.

Anmerkung. Die vorausgehenden Berechnungen setzen voraus, daß die Elastizitätsgrenze nicht überschritten wird. Drückt man einen Ring aus einem dehnbaren Metalle zusammen, so bildet sich sofort nach dem ersten Auftreten bleibender Formänderungen ein anderer Spannungszustand aus. Am Scheitel, wo die größten Spannungen auftreten, genügt schon eine sehr kleine bleibende Formänderung, um den Wert des Biegungsmoments an dieser Stelle herab und hiermit zugleich den Wert von M_0 hinauf zu setzen. Dies hat zur Folge, daß ein solcher Metallring größere Lasten zu tragen vermag, als sich aus der vorausgehenden Berechnung ergibt, bevor er in merklicher Weise bleibend zusammengedrückt wird. Einige Versuche, die ich mit Rohrabschnitten anstellte, haben dies bestätigt.

Wir wollen jetzt noch berechnen, um wieviel sich der horizontale Durchmesser der Röhre bei der Belastung vergrößert. Dazu können wir uns der in § 38 für die Vergrößerung $\varDelta l$ der Spannweite eines Bogenträgers abgeleiteten Formeln bedienen. Nach Gl. (122) war

$$\varDelta l = \int \frac{Mz}{E\Theta} ds.$$

Da l hier schon in einem anderen Sinne (als Länge des Rohres) gebraucht ist, schreibe ich $\varDelta d$ für die Vergrößerung des Durchmessers d. An Stelle von M ist im linken Quadranten $M = M_0 + \frac{P}{2}(r - r\cos\varphi)$ und für z ist $z = r\sin\varphi$ zu setzen. Die Integration wird nur über den linken Quadranten ausgedehnt und dann das Doppelte des Resultats genommen, da der Quadrant rechts ebensoviel zu $\varDelta d$ beiträgt. Diese Spaltung des Integrals ist nötig, weil der für M angegebene Ausdruck in dieser Form nur für den linken Quadranten gültig ist. Für Θ setze ich noch $\Theta = \frac{lh^3}{12}$, um die Betrachtung für ein Rohr (oder überhaupt für einen rechteckigen Querschnitt) vollständig durchzuführen. Man findet nach Ausführung der Integration

$$\varDelta d = \frac{Pr^3}{E\Theta} \cdot \frac{4-\pi}{2\pi} = 1{,}639 \frac{Pr^3}{Elh^3}. \tag{128}$$

Natürlich hätte man alle diese Berechnungen auch auf Grund des Satzes von der kleinsten Formänderungsarbeit durchführen können. Ich will hier noch zeigen, wie dieser Satz selbst noch in einem viel allgemeineren Falle zur Lösung der Aufgabe benutzt werden kann. Abb. 48 gibt den ringförmigen Körper unter dem Einflusse beliebig längs des Umfangs verteilter Druckkräfte (an deren Stelle auch Zugkräfte treten können) an. Von diesen äußeren Kräften wird nur verlangt, daß sie sich an dem Ringe im Gleichgewichte halten sollen. Man soll die dadurch hervorgerufenen Spannungen berechnen.

Um die Aufgabe zu lösen, führe man irgend einen Querschnitt mm durch den Ring. Die in diesem Schnitte übertragenen Spannungen kann man zusammensetzen zu einer Normalkraft N_0, einer Schubkraft T_0 und einem Anfangsmomente M_0. Wenn diese drei Größen für den Anfangsquerschnitt bekannt wären, könnte man für irgend einen anderen Querschnitt, der mit dem ersten einen Winkel φ bildet, die entsprechenden Größen N, T, M sofort angeben, und daraus ließen sich alle Spannungen berechnen. Die Aufgabe ist also dreifach statisch unbestimmt oder mit anderen Worten: der in dieser Aufgabe vorkommende Ring bildet nur einen besonderen Fall des in § 40 besprochenen beiderseits eingespannten Bogens. Die beiden Bogenenden fallen hier miteinander zusammen.

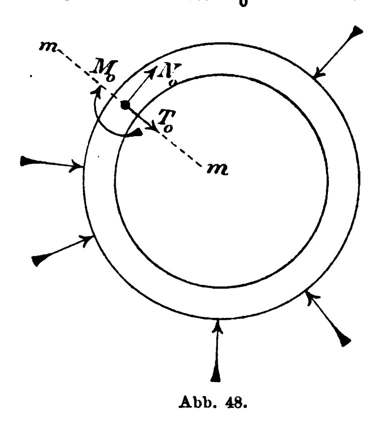


Abb. 48.

In der Tat kann nun auch die Aufgabe, die drei Unbekannten N_0, T_0, M_0 zu berechnen, genau so gelöst werden, wie es dort gezeigt wurde. Man stellt zuerst den Ausdruck für die Formänderungsarbeit A auf, wobei es in der Regel genügen wird, nur auf den Einfluß der Biegungsmomente M zu achten. Dann setzt man die drei Differentialquotienten von A nach N_0, T_0 und M_0 gleich Null und löst diese Gleichungen nach den Unbekannten auf. Denn die Bedingung, daß der Ring im Querschnitte mm in Wirklichkeit zusammenhängt, kommt darauf hinaus, daß sich der Angriffspunkt von N_0 und T_0 nicht verschieben und daß sich die Angriffsstelle von M_0 auch nicht drehen kann, wenn man sich das jenseits des Querschnitts gelegene Ende des aufgeschnittenen Ringes festgehalten denkt. Diesen Verschiebungen und Drehungen sind aber die Differentialquotienten von A nach N_0, T_0, M_0 nach dem Satze von

Castigliano gleich und die Differentialquotienten von A sind daher gleich Null zu setzen.

Man bemerkt hier wieder, wie der Satz von der kleinsten Formänderungsarbeit ohne vieles Nachdenken ganz mechanisch von selbst zu der richtigen Lösung führt.

Die Glieder von Ketten sind gewöhnlich von länglicher Gestalt. Wenn man die Mittellinie als eine Ellipse betrachtet, kann man die Berechnung auf ganz ähnliche Art durchführen, wie es im Eingange des Paragraphen für den kreisförmigen Ring gezeigt wurde. Bei der Ausführung der Integration kommt man aber in diesem Falle auf elliptische Integrale. Es ist daher besser, wenn man in solchen Fällen zum Ersatze der Integration durch eine Summierung endlicher Teile, also zu einer mechanischen Quadratur seine Zuflucht nimmt. Abgesehen von der dadurch veranlaßten etwas langwierigeren Rechnung macht die Lösung der Aufgabe aber auch in diesem Falle gar keine Schwierigkeiten von grundsätzlicher Art.

§ 42. Berechnung der ebenen Spiralfedern.

Eine ebene Spiralfeder (vgl. Abb. 49) ist als ein Bogenträger zu betrachten, der am einen Bogenende eine auf Drehung dieses Endes hinwirkende Belastung aufzunehmen hat. Die Belastung besteht nämlich in dem Kräftepaare, mit dem die in der Federmitte liegende Spindel beim Aufziehen der Feder gedreht oder nach dem Aufziehen festgehalten wird.

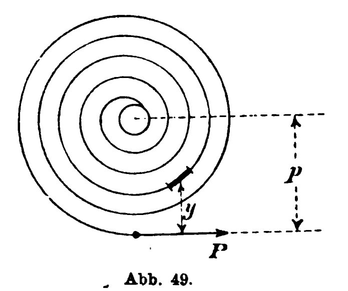


Abb. 49.

Wenn das äußere Federende eingespannt ist, bildet die Feder einen zweifach statisch unbestimmten Bogenträger. Als statisch unbestimmte Größen sind das Einspannmoment M_0 am äußeren Federende und der von diesem Auflager übertragene „Horizontalschub“ H, d. h. die in die Verbindungslinie beider Auflager fallende, hier also, wie wir sagen können, in radialer Richtung gehende Auflagerkomponente zu betrachten. Zur Berechnung der beiden Unbekannten bedient man sich am einfachsten des Verfahrens von Castigliano.

Hier soll die Berechnung nur für den anderen Fall durchgeführt werden, daß sich nämlich das äußere Federende um den Befestigungspunkt frei zu drehen vermag. Dann ist der Bogenträger nur einfach statisch unbestimmt und die statisch unbestimmte Größe H kann überdies gleich Null gesetzt werden. Dies folgt nämlich sofort aus Gl. (118), denn für M_b hat man hier

$$M_b = Py \quad \text{und daher} \quad \int M_b z ds = P \int y z ds$$

und dies wird, da y für jedes Bogenelement das gleiche Vorzeichen, z dagegen für die zu verschiedenen Seiten des in der y-Richtung gezogenen Durchmessers liegenden Bogenelemente entgegengesetzte Vorzeichen hat, ungefähr zu Null, oder doch jedenfalls sehr klein gegen $\int z^2 ds$. Daraus folgt, daß H gegen die andere Auflagerkomponente P vernachlässigt werden kann. Hiernach ist auch das Biegungsmoment M

$$M = M_b = Py.$$

Das Vorzeichen von M ist für alle Längenelemente dasselbe. Bei der in der Abbildung angenommenen Richtung von P wäre es eigentlich nach den üblichen Festsetzungen negativ zu nehmen; es genügt aber hier, wenn wir nur mit den Absolutbeträgen rechnen, da ein Zweifel über den Sinn, in dem die auftretenden Formänderungen zu nehmen sind, ganz ausgeschlossen ist. Nach Gl. (112) erhalten wir:

$$\Delta d\varphi = \frac{Py}{E\Theta} ds,$$

und wenn wir dies über die ganze Ausdehnung der Mittelinie integrieren und konstanten Querschnitt voraussetzen:

$$\Delta \varphi = \frac{P}{E\Theta} \int y ds. \tag{129}$$

Das hier vorkommende Integral hat eine einfache Bedeutung; es gibt das statische Moment der Mittellinie in Bezug auf die Richtungslinie der Kraft P an. Dafür können wir auch das Produkt aus der Länge l der Mittellinie und dem Abstande des Schwerpunktes setzen. Offenbar fällt nun der

Schwerpunkt der Mittellinie ziemlich genau mit der Mitte der Spindel zusammen und wir haben daher auch, wenn p die Entfernung des äußeren Federendes von der Spindelmitte angibt,

$$\Delta\varphi = \frac{Pp}{E\Theta} l. \tag{130}$$

Bei der Anwendung solcher Federn hat man die Absicht, mechanische Energie von einem durch die besonderen Umstände des Falles bedingten Betrage in Gestalt von Formänderungsarbeit aufzuspeichern. Die Berechnung der Formänderungsarbeit A ist daher hier von besonderer Wichtigkeit. Am einfachsten stellt man zu diesem Zwecke fest, wieviel mechanische Arbeit beim Aufziehen der Feder, also bei der Umdrehung der Spindel geleistet wird. Dazu beachte man, daß die an der Spindel angreifenden äußeren Kräfte mit der Kraft P am äußeren Ende ein Gleichgewichtssystem bilden müssen. Die Kräfte an der Spindel lassen sich daher zu einer Einzelkraft P, die durch die Spindelmitte geht, und einem Kräftepaare vom Momente Pp zusammensetzen. Die Einzelkraft wird von der Lagerung der Spindel aufgenommen, das Moment nur dann, wenn eine Hemmung in das auf der Spindel sitzende Sperrrad eingreift. Beim Aufziehen der Feder muß aber ein Kräftepaar M angebracht werden, das die Drehung der Spindel erzwingt. Die Arbeitsleistung eines Kräftepaares bei einer Drehung ist gleich dem Produkte aus dem Momente und dem in Bogenmaß ausgedrückten Drehungswinkel. Hier ist noch der Faktor $\frac{1}{2}$ beizufügen, weil es auf den Mittelwert des Momentes während des Aufziehens ankommt. Man hat daher

$$A = \tfrac{1}{2} M \Delta\varphi = \frac{(Pp)^2}{2E\Theta} l. \tag{131}$$

Dieser Ausdruck kann noch etwas umgeformt werden. Man sucht nämlich die Leistung der Feder möglichst auszunutzen, d. h. soviel Arbeit als möglich in ihr aufzuspeichern. Die Grenze dafür ist durch die zulässige Beanspruchung des Materials gegeben. Diese wählt man bei den Federn, die meistens aus bestem Stahle hergestellt werden, aus demselben Grunde gewöhnlich sehr hoch, viel höher als es der Sicher-

heit wegen bei anderen Konstruktionen zu geschehen pflegt. Jedenfalls darf man aber nicht über die Elastizitätsgrenze oder die damit in der Regel zusammenfallende Proportionalitätsgrenze des Materials gehen. Bezeichnen wir die hiernach als zulässig anzusehende größte Biegungsspannung mit σ, so ist

$$\sigma = \frac{2\,Pp}{\Theta} e,$$

denn das größte Biegungsmoment tritt in der äußersten Windung diametral gegenüber der Befestigungsstelle auf und der Hebelarm der Kraft P kann dort gleich $2p$ gesetzt werden. Mit Hilfe dieser Gleichung kann das größte Moment Pp, das an der Spindel angreifen darf, in σ ausgedrückt und dieser Wert in Gl. (131) eingeführt werden. Man findet

$$A = \frac{\sigma^2 \Theta}{8 e^2 E} l. \tag{132}$$

Wenn der Querschnitt der Feder, der hier stets als konstant vorausgesetzt wurde, gegeben ist, kann dies noch weiter ausgerechnet werden. Für einen rechteckigen Querschnitt von den Seiten b und h wird $\Theta = \frac{bh^3}{12}$ und $e = \frac{h}{2}$, also

$$A = \frac{\sigma^2 bhl}{24 E} = \frac{\sigma^2}{24 E} \cdot V. \tag{133}$$

In der letzten Formel bedeutet $V = bhl$ das Volumen der Feder und mann erkennt daraus, daß die Formänderungsarbeit nur von dem Volumen, also dem Materialaufwande abhängt und nicht davon, wie sich das Volumen aus den drei Faktoren b, h und l zusammensetzt.

§ 43. Stäbe von starker Krümmung.

Alle Betrachtungen dieses Abschnitts beruhten auf der Voraussetzung, daß der Krümmungshalbmesser der Stabmittellinie als sehr groß gegenüber der in die Biegungsebene fallenden Querschnittshöhe angesehen werden könne. In den meisten praktisch vorliegenden Fällen trifft dies auch mit hinreichender Annäherung zu. In manchen Fällen aber, so namentlich bei

den Lasthaken der Hebezeuge und den Zughaken der Eisenbahnfahrzeuge ist die genannte Voraussetzung keineswegs erfüllt.

In solchen Fällen sind die Längen ds der zwischen zwei aufeinander folgenden Querschnitten liegenden Fasern in verschiedenen Abständen vom Krümmungsmittelpunkte von vornherein erheblich verschieden voneinander und die Längenänderungen Δds sind daher nicht mehr ausschließlich dem zugehörigen Werte von σ proportional, sondern sie hängen außerdem auch von der ursprünglichen Länge ds, also von der Entfernung der Fasern vom Krümmungsmittelpunkte ab. Dies hat, wie man sofort sehen wird, zur Folge, daß entweder, wenn die Querschnitte bei der Biegung eben bleiben, die Spannungen σ über den Querschnitt nicht mehr nach einem Geradliniengesetze verteilt sein können, oder daß umgekehrt, wenn man diese Spannungsverteilung voraussetzt, die Querschnitte bei der Formänderung nicht mehr eben bleiben können. Man muß daher von diesen beiden Annahmen, die bei der Berechnung des geraden oder des schwach gekrümmten Stabes miteinander übereinstimmen, die eine fallen lassen. Ich will mich hier nicht in eine Erörterung der meiner Meinung nach noch keineswegs hinreichend geklärten Frage einlassen, welche von beiden Annahmen (die ja an sich beide willkürlich sind, so daß nur auf Grund von Versuchsergebnissen eine Entscheidung zwischen ihnen möglich ist) den Vorzug verdient, da eine ausführliche Erörterung streitiger Fragen mit dem Zwecke eines Lehrbuchs nicht wohl vereinbar ist. Ich begnüge mich daher mit der Bemerkung, daß man heute gewöhnlich bei der Berechnung stark gekrümmter Stäbe die Annahme zu Grunde legt, daß die Querschnitte eben bleiben. Die nachfolgenden Berechnungen beruhen ebenfalls auf dieser Voraussetzung.

Abb. 50.

In Abb. 50 ist ein zwischen zwei aufeinander folgenden Querschnitten liegendes Stabelement dargestellt. Mit NN ist die neutrale Faserschicht bezeichnet, also jene, die

sich bei der Biegung weder verlängert noch verkürzt. Der Krümmungsmittelpunkt O gelangt durch die Formänderung nach O'. Für die ursprüngliche Länge ds irgend einer Faser im Abstande y von NN hat man mit Benutzung der in Abb. 50 eingeschriebenen Bezeichnungen

$$ds = (r + y)d\varphi$$

und für die zugehörige Längenänderung $\varDelta ds$

$$\varDelta ds = y \varDelta d\varphi.$$

Daraus folgt für die Spannung σ nach dem Hookeschen Gesetze

$$\sigma = E\frac{\varDelta ds}{ds} = \frac{y}{r+y} \cdot E\frac{\varDelta d\varphi}{d\varphi}.$$

In der Tat ist also σ keine lineare Funktion von y; wenn man die Abhängigkeit der Spannung von y durch eine Kurve veranschaulicht, erhält man vielmehr einen Hyperbelbogen.

Da der betrachtete Formänderungszustand durch ein Biegungsmoment hervorgerufen sein sollte, muß $\int \sigma dF = 0$ sein und dies liefert für die Ermittelung der Lage der neutralen Faser nach Einsetzen des Wertes von σ die Bedingungsgleichung

$$\int \frac{y}{r+y} dF = 0.$$

Hieraus folgt, daß NN nicht durch den Schwerpunkt des Querschnitts geht. Bei der Behandlung eines Beispieles in Aufgabe 26 wird noch näher gezeigt werden, wie man mit Hilfe der vorstehenden Gleichung den Abstand von NN bis zum Schwerpunkte ermitteln kann. Nachdem auf diese Weise r berechnet ist, erhält man die Spannungen σ nach dem Momentensatze, also auf Grund der Gleichung

$$\int y \sigma dF = M,$$

die nach Einsetzen des Ausdruckes für σ übergeht in

$$\varepsilon \frac{\varDelta d\varphi}{d\varphi} \int \frac{y^2}{r+y} dF = M.$$

Wenn y gegen r im ganzen Querschnitte klein wäre, würde das Integral in das Trägheitsmoment Θ des Querschnitts, geteilt durch r übergehen. Entwickelt man den Bruch unter dem

Integralzeichen in eine Reihe, so erhält man auch

$$\int \frac{y^2}{r+y} dF = \frac{1}{r}\left[\int y^2 dF - \frac{1}{r}\int y^3 dF + \frac{1}{r^2}\int y^4 dF - \cdots\right]$$

von der man so viele Glieder berücksichtigen kann, als gerade nötig erscheint. Setzt man für den Klammerwert, der bei großem r in Θ übergeht, den Buchstaben Θ', so erhält man aus der vorhergehenden Gleichung

$$E\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} = \frac{Mr}{\Theta'}$$

und damit geht der Ausdruck für σ über in

$$\sigma = \frac{ry}{r+y} \cdot \frac{M}{\Theta'}. \tag{134}$$

Für ein großes r stimmt diese Gleichung mit der früher für den geraden Stab abgeleiteten überein.

Aufgaben.

26. Aufgabe. Der Querschnitt eines gekrümmten Stabes sei ein Rechteck von 2 cm Breite und 4 cm Höhe (diese Seite in der Richtung des Krümmungshalbmessers gemessen) und der Krümmungshalbmesser der Mittellinie sei gleich 5 cm. Um wieviel unterscheidet sich die nach § 43 berechnete größte Spannung, die durch ein Biegungsmoment M hervorgerufen wird, von der nach der einfachen Formel $\sigma = \frac{M}{\Theta} y$ *gefundenen?*

Lösung. Nach Gl. (134) hat man für die Spannung σ einen Ausdruck von der Form

$$\sigma = c \cdot \frac{y}{r+y},$$

worin jetzt c eine konstante (d. h. von y unabhängige) Größe ist, die wir berechnen werden. Die Abstände y sind von der Nulllinie NN aus gerechnet, deren Lage zunächst ermittelt werden muß. Dafür dient uns die Gleichung

$$\int \sigma dF = 0 \quad \text{oder} \quad \int \frac{y}{r+y} dF = 0,$$

die ausspricht, daß die Spannungen zu einem Biegungsmomente

gehören. Mit Rücksicht auf die in Abb. 51 eingeschriebenen Bezeichnungen ist $y + r = u$ und $dF = b\,du$ zu setzen. Daher geht die vorige Gleichung über in

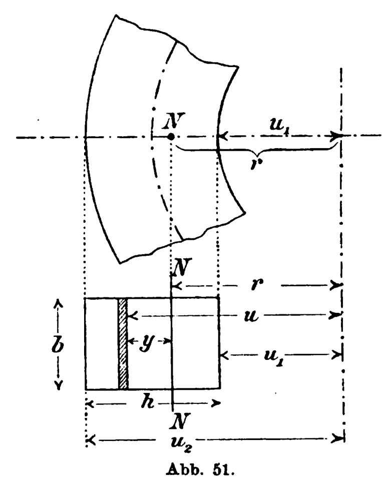


Abb. 51.

$$\int_{u_1}^{u_2} \frac{u - r}{u}\, du = h - r \lg \frac{u_2}{u_1} = 0,$$

aus der $r = h : \lg \frac{u_2}{u_1}$ folgt. Setzt man die im vorliegenden Beispiele gewählten Zahlenwerte ein, so findet man

$$r = 4 : \lg \frac{7}{3} = 4{,}72 \text{ cm}.$$

Die Nulllinie NN liegt also um 0,28 cm von der Mitte entfernt.

Um jetzt noch c zu berechnen, schreibe ich die Momentengleichung an:

$$M = \int \sigma\, dF y = c \int \frac{y^2}{r + y}\, dF = cb \int_{u_1}^{u_2} \frac{(u - r)^2}{u}\, du.$$

Für das Integral erhält man:

$$\int_{u_1}^{u_2} \frac{(u - r)^2}{u}\, du = \int_{u_1}^{u_2} u\, du - 2r \int_{u_1}^{u_2} du + r^2 \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{u} = \frac{u_2^2}{2} - \frac{u_1^2}{2} - 2rh$$
$$+ r^2 \lg \frac{u_2}{u_1} = h\left(\frac{u_2 + u_1}{2} - r\right).$$

Demnach ist

$$c = \frac{M}{bh\left(\frac{u_2 + u_1}{2} - r\right)}.$$

Die Spannung an der Innenkante $(u = u_1)$ sei mit σ_{I}, die an der Außenkante mit σ_{II} bezeichnet; man hat dann

$$\sigma_{\text{I}} = c\, \frac{u_1 - r}{u_1} = - \frac{M}{8(5 - 4{,}72)} \cdot \frac{1{,}72}{3} = - 0{,}256\, M,$$

$$\sigma_{\text{II}} = c\, \frac{u_2 - r}{u_2} = \frac{M}{8(5 - 4{,}72)} \cdot \frac{2{,}28}{7} = 0{,}145\, M,$$

wobei als Längeneinheit 1 cm zugrunde gelegt ist. Die Vorzeichen

der Spannungen σ_I und σ_{II} richten sich natürlich nach dem Drehsinne des Biegungsmoments M und kommen hier nicht weiter in Betracht. Die größte Spannung tritt an der Innenkante auf. Nach der einfachen Formel $\sigma = \frac{M}{\Theta} y$ werden die Spannungen an beiden Kanten gleich groß und zwar

$$\sigma_I = \sigma_{II} = \frac{6\,M}{bh^2} = \frac{6\,M}{2 \cdot 16} = 0{,}187\,M.$$

Der Unterschied der größten Kantenspannung nach beiden Annahmen beträgt daher 0,069 M oder 37% von dem nach der einfachen Formel berechneten Werte. Bei den Haken liegen die Verhältnisse ähnlich; dort kommt aber zu der Beanspruchung durch das Biegungsmoment noch eine Normalkraft und dadurch werden die Unterschiede etwas herabgemindert.

27. Aufgabe. Ein Flußeisenstab hat quadratischen Querschnitt von 6 cm Seite und eine gekrümmte Mittellinie von 1,20 m Spannweite und 20 cm Pfeil. Er wird als elastischer Bogenträger aufgestellt und trägt eine Einzellast in der Mitte von 3000 kg. Wie groß ist der Horizentalschub und wie groß die Beanspruchung des Materials?

Lösung. Für ein Koordinatensystem der XZ, dessen Ursprung mit dem linken Auflager zusammenfällt und dessen X-Achse horizontal gerichtet ist, lautet die Gleichung einer Parabel von der Spannweite l und dem Pfeile f:

$$z = \frac{4f}{l^2}(lx - x^2).$$

Von der Mittellinie des Stabes ist zwar nicht gesagt, daß sie einen Parabelbogen bilde; man weiß vielmehr nur, wie groß Spannweite und Pfeil ist. In solchen Fällen legt man aber immer die für die Rechnung bequemste Annahme über die genauere Gestalt der Mittellinie zugrunde. Für das Biegungsmoment M_b eines Balkens infolge der Einzellast P in der Mitte hat man $M_b = \frac{P}{2} x$ nnd nach Gl. (118) findet man den Horizontalschub H

$$H = \frac{\int M_b z\,dx}{\int z^2 dx}.$$

Hierbei ist an Stelle von ds in Gl. (118) das Differential dx gesetzt. Auch dies ist eine zur bequemeren Ausrechnung dienende, praktisch zulässige Vernachlässigung, mit der man sich bekannt machen muß. Zur Rechtfertigung dafür erwähne ich zunächst, daß sich die Bogenlänge nicht viel von der Länge der Sehne

unterscheidet. Hier ist aber nicht nur im Zähler, sondern auch im Nenner an Stelle von ds der kleinere Faktor dx getreten und man sieht ein, daß dadurch der Fehler, der im Werte von H begangen wird, noch weiter herabgemindert wird. Wenn M_b überall proportional mit z wäre, würde H von der Vertauschung des Differentials ds mit dx überhaupt nicht berührt. In anderen Fällen ist aber der Fehler höchstens etwa von der Ordnung des Unterschiedes zwischen Bogen und Sehne und dieser fällt bei einem flachen Bogen innerhalb der Genauigkeitsgrenzen, die man bei Festigkeitsberechnungen überhaupt anstrebt, nicht ins Gewicht.

Beim Einsetzen der Werte von M_b und z findet man:

$$\int M_b z\,dx = 2\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{P}{2}\,x\,\frac{4f}{l^2}(lx - x^2)\,dx = \frac{5}{48}Pfl^2.$$

Das Integral mußte in zwei Teile gespalten und ein Teil nur über die linke Bogenhälfte ausgedehnt werden, weil der Ausdruck für M nur für diese Bogenhälfte gilt. Das Integral im Nenner von H kann dagegen sofort von 0 bis l ausgedehnt werden. Man findet

$$\int_0^l z^2 dx = \frac{16f^2}{l^4}\int_0^l (l^2x^2 - 2lx^3 + x^4)\,dx = \frac{8}{15}f^2 l.$$

Für H erhält man demnach:

$$H = \frac{\frac{5}{48}Pfl^2}{\frac{8}{15}f^2 l} = \frac{25}{128}P\frac{l}{f} = 3520 \text{ kg}.$$

Das Biegungsmoment M ist:

$$M = \frac{P}{2}x - Hz = 1500x - 3520z.$$

Um das Maximum zu finden, differentiieren wir nach x:

$$\frac{dM}{dx} = 1500 - 3520\frac{dz}{dx} = 1500 - 3520\frac{4f}{l^2}(l - 2x).$$

Dies wird zu Null für $x = 22$ cm und die Ordinate z wird an dieser Stelle $z = 12$ cm, das Vorzeichen des Momentes an dieser Stelle ist negativ. Wir haben also $M_{\min} = -9200$ cmkg. Daneben kommt aber auch das Biegungsmoment im Bogenscheitel in Betracht, das kein analytisches Maximum ist, aber wegen der bis

zum Bogenscheitel begrenzten Gültigkeit des Ausdrucks für M trotzdem den absolut größten Wert annimmt. Man hat nämlich

$$M_{\frac{l}{2}} = 1500 \cdot 60 - 3520 \cdot 20 = +\,19\,600 \text{ cmkg.}$$

An der gefährlichst beanspruchten Stelle wird daher

$$\sigma = \frac{6M}{bh^2} = \frac{6 \cdot 19\,600}{6^3} = 544 \text{ atm.}$$

Dazu kommt noch die sich gleichförmig über den Querschnitt verteilende Druckspannung durch die achsiale Belastung von der Größe H, also $\frac{3520}{36} = 98$ atm. Die größte Druckspannung, die das Material aufzunehmen hat, wird also gleich $544 + 98 = 642$ atm. und die größte Zugspannung gleich $544 - 98 = 446$ atm.

28. *Aufgabe. Derselbe Träger wird mit 10 000 kg gleichförmig belastet; wie groß wird der Horizontalschub a) ohne, b) mit Berücksichtigung des Einflusses der Normalkraft auf die Formänderungen?*

Lösung. Wir brauchen hier nur die Zahlenwerte in die Formeln von § 37 einzusetzen. Im Falle a) haben wir nach Gl. (119)

$$H = \frac{ql^2}{8h} = \frac{10\,000 \cdot 120}{8 \cdot 20} = 7500 \text{ kg.}$$

Für den Fall b) wenden wir Gl. (121) an. Mit $M_b = \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{z}{f}$ wird

$$\int M_b z\,dx = \frac{ql^2}{8f}\int z^2 dx = \frac{ql^3 f}{15}$$

mit Benutzung eines schon bei der Lösung der vorausgehenden Aufgabe gefundenen Resultats. Für i^2 ist

$$i^2 = \frac{\Theta}{F} = \frac{bh^3}{12bh} = \frac{h^2}{12} = \frac{36}{12} = 3 \text{ cm}^2$$

zu setzen. Nach Gl. (121) hat man daher (nach Vertauschung von ds mit dx)

$$H = \frac{\int M_b z\,dx}{\int z^2 dx + \int i^2 dx} = \frac{\frac{ql^3 f}{15}}{\frac{8}{15} f^2 l + i^2 l} = \frac{10\,000 \cdot 120 \cdot 20}{8 \cdot 20^2 + 15 \cdot 3} = 7396 \text{ kg.}$$

Der Unterschied zwischen den Fällen a) und b) ist daher unerheblich.

29. *Aufgabe. Um wieviel vergrößert sich die Spannweite, wenn der in den vorhergehenden Aufgaben angeführte Stab als*

Balkenträger aufgestellt wird, unter dem Einflusse der in Aufgabe 27 angegebenen Belastung.

Lösung. Nach Gl. (122) ist, wenn an Stelle von M hier M_b gesetzt und ds mit dx vertauscht wird,

$$\Delta l = \int \frac{M_b}{E\Theta}\, dx = \frac{5 P f l^2}{48 E \Theta} = \frac{5 \cdot 3000 \cdot 20 \cdot 120^2}{48 \cdot 22 \cdot 10^5 \cdot 108} = 0{,}38 \text{ cm}.$$

Dabei ist für das Integral der schon in der Lösung von Aufg. 27 gefundene Wert und für den Elastizitätsmodul E des Flußeisens $22 \cdot 10^5$ atm eingesetzt. — Wenn die Widerlager um 1 mm nachgeben, wird dadurch in jedem Belastungsfalle der Horizontalschub um $\frac{3520}{3{,}8} = 926$ kg vermindert.

30. *Aufgabe. Nach welchem Gesetze muß die Stärke eines vorher auf einen größeren Durchmesser abgedrehten Kolbenringes von der Schlitzstelle aus nach beiden Seiten hin zunehmen, wenn der Ring nach dem Einpassen in den Zylinder überall mit demselben spezifischen Drucke p in radialer Richtung an der Zylinderwand anliegen soll?*

Lösung. Man betrachte einen Querschnitt im Winkelabstande φ von der Schlitzstelle (vgl. Abb. 52). Die äußeren Kräfte am einen Stabteile geben eine Resultierende, die ebenso groß und ebenso gelegen ist, als wenn sich der Druck p auf die Sehne s verteilte. Dies folgt nämlich aus einer hydrostatischen Betrachtung, von der man bei solchen Untersuchungen oft Gebrauch macht. Ein Wasserkörper, der den Raum des Segmentes ausfüllte, wäre im Gleichgewichte, wenn von allen Seiten her der Druck p auf ihn wirkte. Daraus folgt sofort, daß die Resultierende des Drucks am Bogenumfang gleich der Resultierenden des Drucks längs der Sehne ist. Wenn wir die Breite des Ringes (senkrecht zur Ebene von Abb. 52) mit b bezeichnen, ist diese Resultierende gleich pbs und das Biegungsmoment im Querschnitte φ

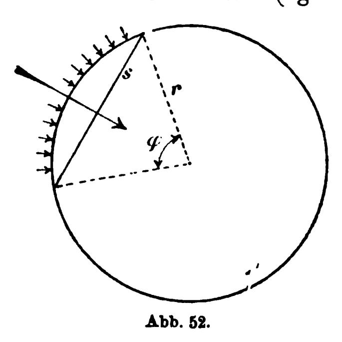


Abb. 52.

$$M = pb \frac{s^2}{2} = 2pbr^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cdot$$

Vorher sei der Ring auf einen um Δr größeren Radius abgedreht gewesen; durch die elastische Formänderung muß sich der

Radius überall auf r vermindern, wenn der Ring nachher überall satt anliegen soll. Nach Gl. (111) haben wir daher

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{\varDelta r + r} = \frac{M}{E\Theta} = \frac{12}{Eh^3} \cdot 2pr^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Für die linke Seite kann man, da $\varDelta r$ klein gegen r ist, kürzer $\frac{\varDelta r}{r^2}$ setzen. Die Gleichung kann dann nach der unbekannten, veränderlichen Stärke h des Kolbenringes aufgelöst werden und gibt

$$h = c \sqrt[3]{\sin^2 \frac{\varphi}{2}},$$

wenn unter c der für den ganzen Ring konstante Wert

$$c = \sqrt[3]{\frac{24pr^4}{E \cdot \varDelta r}}$$

verstanden wird. Die erste von beiden Gleichungen gibt das allgemeine Gesetz an, nach dem h mit φ zunehmen muß; c dagegen ist die größte Stärke, die der Ring an der der Schlitzstelle gegenüberliegenden Stelle erhält. Die letzte Gleichung kann daher auch umgekehrt dazu benutzt werden, die Stärke des Drucks p, mit dem der Ring an der Zylinderwand aufliegt, zu berechnen, wenn c und $\varDelta r$ gegeben sind.

Für $\varphi = 0$ und für $\varphi = 360^0 = 2\pi$ gibt die Formel $h = 0$, d. h. der Ring müßte dort in einer Schneide endigen. Davon sieht man bei der praktischen Ausführung ab; dagegen ist es allgemein gebräuchlich, die Stärke des Ringes sonst in ungefährer Übereinstimmung mit der abgeleiteten Formel nach der Mitte hin zunehmen zu lassen.

Bei der Berechnung ist überall h als klein gegen r vorausgesetzt worden, so daß r als Radius der Mittellinie genommen werden konnte. Mit Rücksicht auf den Zweck der Rechnung war diese Vernachlässigung zulässig. Man hätte natürlich auch für r den genaueren Wert $r - \frac{h}{2}$ setzen können; man glaube aber nicht, daß dies in Wirklichkeit eine Verbesserung wäre. Es handelt sich bei solchen Untersuchungen immer darum, die Hauptzüge einer Erscheinung in möglichst einfach gebauten Formeln wiederzugeben und auf Kleinigkeiten zu verzichten. Freilich will diese Kunst, an der rechten Stelle die angebrachte Vernachlässigung einzuführen, geübt sein, damit man nicht einmal ein Glied unterdrückt, das von größerer, vielleicht sogar von ausschlaggebender Bedeutung ist.

Anmerkung. Der Ausdruck für M in der vorausgehenden Rechnung kann auch noch in der folgenden Weise umgestaltet werden:

$$M = 2pbr^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} = pbr(r - r\cos\varphi) = pbrz,$$

wenn in dem letzten Ausdrucke unter z der senkrechte Abstand des zum Winkel φ gehörigen Punktes von der an der Schlitzstelle gezogenen Tangente des Kreises verstanden wird. Das Biegungsmoment ist demnach überall so groß, als wenn die Belastung durch den Umfangsdruck p entfernt und durch eine Kraft $P = pbr$ ersetzt wäre, mit der die beiden Enden des Ringes an der Schlitzstelle gegeneinander gezogen würden. — Hieraus folgt ganz allgemein die folgende Vorschrift für die Herstellung eines Kolbenringes, dessen Stärke h eine ganz willkürliche Funktion des Winkels φ sein darf und der nachher trotzdem überall mit dem gleichen Drucke p aufliegt. Man schneide den gegossenen Ring zunächst auf, ziehe dann die Enden mit einer Kraft P gegeneinander und drehe ihn in diesem gespannten Zustande auf einer Drehbank außen kreisrund zum Halbmesser des Zylinders ab, in den er später passen soll. Läßt man, nachdem dies geschehen ist, die Enden wieder frei, so federt er auseinander und der Umfang ist dann nicht mehr genau kreisrund. Sobald er aber nachher in den Zylinder eingesetzt und ihm dadurch die Gestalt wieder aufgezwungen wird, die er bei der Bearbeitung auf der Drehbank angenommen hatte, liegt er nun mit einem gleichförmigen Drucke p an der Zylinderwand an, der aus der Gleichung $P = pbr$ ohne weiteres berechnet werden kann.

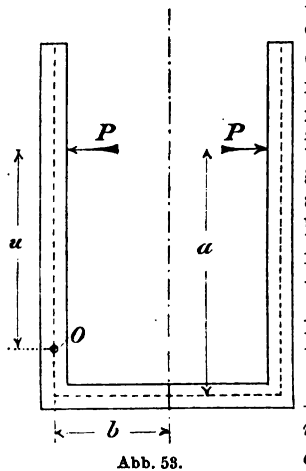


Abb. 53.

31. Aufgabe. Ein U-förmiger Bügel von konstantem Querschnitte wird mit Hilfe einer zwischen den Schenkeln angebrachten Schraube in der Höhe a auseinander gebogen (vgl. Abb. 53). Die über a hinaus liegenden Teile der Schenkel bleiben hierbei geradlinig und zwar dreht sich jeder Teil beim Auseinanderbiegen um einen festen Punkt O. Man soll dessen Lage ermitteln.

Lösung. Der Körper ist als ein Bogen aufzufassen, dessen Mittellinie aus drei Seiten eines Rechtecks zusammengesetzt wird.

Wir berechnen zunächst, um wieviel sich die Spannweite unter dem Einflusse eines Horizontalschubs oder Horizontalzugs verändert und dann, um welchen Winkel sich die oberen Teile der Schenkel drehen; wenn beide Werte bekannt sind, kann daraus leicht die Lage des Drehpunktes ermittelt werden. Vorausgesetzt wird, daß der Bügel während der Formänderung so festgehalten wird, daß die Symmetrieachse ihre Lage beibehält; auf die Bewegungen, die der Bügel daneben etwa noch im ganzen ausführen könnte, kommt es natürlich nicht an.

Zur Berechnung von Δl verwenden wir Gl. (122):

$$\Delta l = \int \frac{Mz}{E\Theta} ds.$$

Die Integration ist über die eine Hälfte der Bogenmittellinie auszudehnen und dabei in zwei Teile zu trennen, von denen der eine sich auf die horizontale Strecke und der andere sich auf die vertikale Strecke der Mittellinie bezieht. In der ersten Strecke ist z überall gleich a, in der zweiten ist $ds = dz$ und daher

$$\Delta l = \int_0^b \frac{Pa \cdot a}{E\Theta} ds + \int_0^a \frac{Pz \cdot z}{E\Theta} dz = \frac{Pa^2}{E\Theta}\left(b + \frac{a}{3}\right).$$

Die Drehung $\Delta\varphi$ des oberen Teiles des Schenkels ist gleich der Summe aller elastischen Winkeländerungen $\Delta d\varphi$ benachbarter Querschnitte, die zwischen dem Bogenanfange und der Mitte liegen, also nach Gl. (112)

$$\Delta\varphi = \int \frac{Mds}{E\Theta} = \int_0^b \frac{Pads}{E\Theta} + \int_0^a \frac{Pz}{E\Theta} dz = \frac{Pa}{E\Theta}\left(b + \frac{a}{2}\right).$$

In seine neue Lage kann der obere Teil des Schenkels auch dadurch gebracht werden, daß man ihn um einen auf der ursprünglichen Lage der Schenkelmittellinie gelegenen Punkt um den Winkel $\Delta\varphi$ dreht, wenn dieser Punkt im Abstande u von der Angriffsstelle der Kraft P nach abwärts liegt. Man braucht den Abstand u nur so zu wählen, daß der Angriffspunkt von P bei der Drehung einen Weg Δl zurücklegt. Daraus folgt die Bedingungsgleichung

$$u\Delta\varphi = \Delta l, \text{ also } u = \frac{6b + 2a}{6b + 3a} \cdot a.$$

Da u unabhängig von P ist, folgt, daß sich der überstehende Teil des Schenkels in der That fortwährend um denselben Punkt dreht, dessen Lage zugleich ermittelt ist. — Rechnungen dieser

Art sind zuweilen nötig, um sich über die Art der elastischen Bewegungen, die in Meßinstrumenten oder auch in Maschinen auftreten und dabei leicht einen störenden Einfluß ausüben, rasch Rechenschaft geben zu können.

32. Aufgabe. Ein Bogenträger von halbkreisförmiger Gestalt (Abb. 54) ist gelenkförmig aufgelagert. Am rechten Bogenende ist eine Stange in radialer Richtung angebracht, an der ein Kräftepaar Pp angreift. Die Stange überträgt diese Belastung auf den Bogen. Man soll die Komponenten A und H des Auflagerdrucks am linken Trägerende berechnen, wobei anzunehmen ist, daß der Träger überall gleichen Querschnitt hat. Ferner soll noch angegeben werden, für welchen Querschnitt das Biegungsmoment zu Null wird.

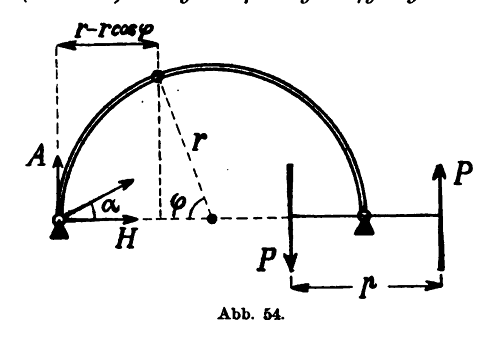


Abb. 54.

Lösung. Aus einer Momentengleichung für das rechte Auflager erhält man sofort

$$A = \frac{Pp}{2r}.$$

Zur Berechnung von H dient Gl. (118), wobei

$$M_b = A(r - r\cos\varphi) = Pp\,\frac{1-\cos\varphi}{2}$$

zu setzen ist. Man erhält

$$H = \frac{\int M_b z\,ds}{\int z^2 ds} = \frac{1}{2}\,\frac{Pp\int(1-\cos\varphi)r\sin\varphi\, r\,d\varphi}{\int r^2\sin^2\varphi\cdot r\,d\varphi},$$

wobei die Integrale zwischen 0 und π zu nehmen sind.

Nach Ausführung der Integration findet man

$$H = \frac{2Pp}{r\pi}.$$

Das Biegungsmoment wird zu Null für den Schnittpunkt der Stabmittellinie mit der Resultierenden aus A und H. Für den Winkel α, den diese Resultierende mit der Wagerechten bildet, erhält man

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{A}{H} = \frac{Pp}{2r} : \frac{2Pp}{r\pi} = \frac{\pi}{4} = 0{,}7854.$$

Der zugehörige Winkel α ist gleich $38^0\ 9'$. Hieraus folgt der Zentriwinkel φ jenes Querschnitts, in dem keine Biegungsspannungen auftreten, zu

$$\varphi = 180^0 - 2\alpha = \text{rund } 104^0.$$

Anmerkung. Hinsichtlich der Lagerung und der Belastnng stimmt der hier behandelte Bogenträger vollständig mit der in § 42 untersuchten Spiralfeder überein. Es besteht nur der Unterschied, daß die Spiralfeder eine Reihe von Windungen enthält, während hier die Mittellinie, wie man sagen kann, nur einen halben Umlauf macht.

Sechster Abschnitt.

Stäbe auf nachgiebiger Unterlage.

---

§ 44. Grundlegende Annahmen.

Bei der Berechnung des Eisenbahnoberbaues steht man vor der Aufgabe, die Biegungsmomente, Scherkräfte und Spannungen in einem Stabe zu ermitteln, der zwar seiner ganzen Länge nach gestützt ist, so jedoch, daß die Stützen selbst unter einer Belastung nachgeben. Ähnliche Fälle kommen zwar auch sonst noch bei den Anwendungen der Mechanik öfters vor; wir wollen aber, um eine deutliche Vorstellung von dem Gegenstande der Untersuchung zu gewinnen, hier zunächst immer nur an die Formänderungen und die Beanspruchungen denken, die eine gewöhnliche Eisenbahnquerschwelle erfährt, wenn die beiden auf ihr befestigten Schienen einen gegebenen Druck auf sie übertragen.

Daß sich die Schwelle etwas einsenkt, wenn ein Eisenbahnzug über das Gleis fährt, lehrt schon eine einfache Beobachtung, die man bei jedem Spaziergange längs einer von einem Zuge befahrenen Eisenbahnstrecke machen kann. Man nimmt dabei zunächst wahr, daß die Schiene selbst sich senkt. Dies kommt zum Teil daher, daß die Schwelle der Quere nach zusammengedrückt wird; indessen nur zum kleineren Teile, denn beim Nachrechnen erkennt man, daß die elastische Verkürzung der Schwellenhöhe nicht ausreichen kann, um die mit bloßem Auge sehr deutlich wahrnehmbare Senkung der auf ihr ruhenden Schiene zu erklären. Die Schwelle muß sich

daher tiefer in die Kiesbettung des Eisenbahnkörpers eindrücken und zwar muß die Formänderung des Bettungskörpers eine ziemlich vollkommen elastische sein, da die Schwelle nach der Entlastung jedesmal in ihre frühere Lage zurückkehrt. Man wird im Zusammenhange mit dieser Beobachtung auch zu der Frage geführt, nach welchem Gesetze sich die Last der Länge nach auf die Kiesbettung verteilt und sieht sofort ein, daß eine Beantwortung der Frage nur auf Grund einer näheren Untersuchung der eintretenden elastischen Formänderungen sowohl der Schwelle als des Bettungskörpers möglich ist. Natürlich hängt diese Lastverteilung auch davon ab, auf welche Art die Schwelle schon im unbelasteten Zustande eingebettet ist; wenn irgendwo eine Lücke oder eine lockere Stelle in der Kiesbettung vorkäme, könnte an dieser Stelle überhaupt keine Lastübertragung stattfinden. Wir setzen aber als selbstverständlich voraus, daß die Schwelle überall gut unterstopft sei, so daß sie satt auf dem Kies- oder Schotterbette aufruht und daß also in dieser Hinsicht der ganzen Schwellenlänge nach die Vorbedingungen überall die gleichen sind.

Auf den ersten Blick mag es befremdlich erscheinen, daß ein Körper von der Art eines Sand- oder Kieshaufens im Stande sein könne, ziemlich vollkommen elastische Formänderungen auszuführen. Aber auch andere Erfahrungen bestätigen den Schluß, den wir aus der Beobachtung an dem Eisenbahngleise gezogen haben. In der That weiß man ja, daß ein in solcher Weise zusammengesetzter Erdboden Schallschwingungen fortzupflanzen vermag, daß er also elastische Bewegungen — solche sind die Schallbewegungen — ausführen kann. Ich habe mich aber auch noch durch einen unmittelbaren Versuch von der Elastizität des gewöhnlichen Erdbodens überzeugt. Dazu ließ ich in dem Hofe meines Laboratoriums zwei Pfähle einrammen, die 3 m voneinander entfernt sind und eine Eisenschiene tragen, die etwa 70 cm über dem Boden liegt. Unterhalb der Schiene wurden kleine Holzpflöcke eingeschlagen, die fest im Boden sitzen und dessen Bewegungen mitmachen. Es handelte sich nun darum, die Verschiebungen dieser Holzpflöcke gegen die darüber in fester Lage verharrende Eisenschiene zu messen. Zu diesem Zwecke wurde ein Spiegelgerät an der Schiene befestigt und von dem Holzpflocke aus wurde eine Stange in die Höhe geführt, deren unteres Ende sich um Spitzen in einer Messing-

fassung drehen konnte, die an dem Holzpflocke befestigt war, während das passend zugeschnittene obere Ende auf dem Umfange des Hartgummiröllchens des Spiegelgeräts aufruhte; für einen angemessenen Druck an der Auflagerstelle sorgte ein kleines Übergewicht. Eine Verschiebung des Holzpflocks nach abwärts verrät sich nun durch eine Drehung des Spiegels, die mit einem Fernrohre beobachtet wird. Bei meinen Versuchen entsprach eine Verschiebung des Maßstabbildes im Spiegel gegen das Fadenkreuz des Fernrohrs um einen Teilstrich einer Senkung des Holzpflocks um 0,835 μ oder tausendstel Millimeter, und auf Zehntel mm der Maßstabteilung konnte bei der Ablesung geschätzt werden. Man las also die Bodensenkung, die der Holzpflock mitmachte, im Fernrohre in rund 1200-facher Vergrößerung am Maßstabe ab und die Genauigkeit der Messung stellte sich auf etwa 0,1 μ.

Nun brachte man eine Last von 100 kg in verschiedenen Entfernungen von der Stelle auf, an der die Einsenkung gemessen wurde. Dabei ergaben sich die nachstehenden zusammengehörigen Werte:

Entfernung in cm	=	20	40	60	80
Senkung in $\frac{1}{1000}$ mm (oder μ)	=	14,2	4,2	1,4	0,7.

Für 50 kg Belastung betrug die Einsenkung in 20 cm Entfernung 7,3 μ, so daß die Formänderung der Last ziemlich genau proportional zu sein scheint. Trotzdem ist, wie sich im 5. Bande zeigen wird, die Formänderung sehr wesentlich von jener verschieden, die ein dem Superpositionsgesetze unterworfener, vollkommen elastischer Körper erfahren müßte.

Bei der Berechnung des Eisenbahnoberbaues hat man sich indessen durch eine weit einfachere Annahme geholfen, die für die Ableitung ungefähr richtiger Resultate hinreichend genau zu sein scheint. Man nimmt nämlich an, daß die Einsenkung der Bettung unter dem Drucke der Schwelle an jeder Stelle nur dem gerade dort wirkenden Drucke proportional sei. Genau richtig ist dies natürlich keineswegs; man sieht aber aus den vorher mitgeteilten Zahlen, wie schnell die Einsenkung mit der Entfernung von der Angriffsstelle der Belastung abnimmt. In der That wird also die Tiefe der Einsenkung in erster Linie von den in der nächsten Nachbarschaft übertragenen Druckkräften abhängen und nur wenig von den weiter entfernten beeinflußt sein, so daß eine Rechnung, die sich auf die

Annahme stützt, daß Druck und Einsenkung überall in gleichem Verhältnisse zu einander ständen, nicht viel von der Wahrheit abweichen kann.

§ 45. Die Eisenbahnquerschwelle mit konstantem Querschnitte.

Der auf die Längeneinheit von der Schwelle auf die Bettung übertragene Druck sei mit p, der Druck für das Längenelement dx der Schwelle also mit $p\,dx$ bezeichnet. Für einen Querschnitt im Abstande x vom linken Ende der Schwelle hat man, falls x kleiner als a ist, für die Scherkraft V und das Biegungsmoment M die Ausdrücke

$$V = \int_0^x p\,dx; \quad M = \int_0^x p\,du(x-u),$$

wenn u hier ebenfalls eine Abszisse ist, die man von 0 bis x wachsen läßt.

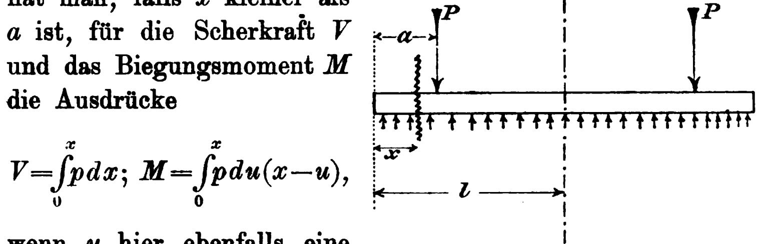


Abb. 55.

Die Benutzung dieser Integrale ist aber unbequem und es ist daher besser, die Differentialquotienten von V und M nach x in der unbekannten Funktion p, auf deren Ermittelung es ankommt, auszudrücken. Man hat zunächst $dV = p\,dx$, ein Ansatz, der unmittelbar aus der Bedeutung von p hervorgeht, und hiermit

$$\frac{dV}{dx} = p. \tag{135}$$

Schon früher fanden wir, daß die Scherkraft V als Differentialquotient des Biegungsmomentes M angesehen werden kann (Gl. 70) und wir finden daher auch

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = p. \tag{136}$$

Die Biegungsmomente bedingen, daß sich die Mittellinie des Stabes krümmt. Bezeichnen wir die Einsenkung, die ein Punkt der Mittellinie bei der Abszisse x erfährt, mit y, so ist $y = f(x)$

die Gleichung der elastischen Linie des Stabes. Die Einsenkungen y sind also einerseits an den Zusammenhang mit den Biegungsmomenten gebunden, der durch die Differentialgleichung der elastischen Linie ausgesprochen wird, und andererseits sind sie nach unserer grundlegenden Annahme der unbekannten Funktion p proportional. Der Vergleich beider Beziehungen miteinander führt zur Lösung der Aufgabe.

Die Differentialgleichung der elastischen Linie (Gl. 76)

$$E\Theta\frac{d^2y}{dx^2} = -M$$

liefert, wenn man sie zweimal nach x differentiiert, mit Rücksicht auf Gl. (136)

$$E\Theta\frac{d^4y}{dx^4} = -p. \tag{137}$$

Die von uns gewählte Annahme über den Zusammenhang zwischen der elastischen Einsenkung y und dem Drucke p für die Längeneinheit der Schwelle kann in der Gleichung

$$p = ky \tag{138}$$

ausgesprochen werden, in der k eine von den elastischen Eigenschaften der Bettung abhängige Konstante ist, die wir als die „Bettungsziffer“ bezeichnen wollen. Gl. (137) geht damit über in

$$E\Theta\frac{d^4y}{dx^4} = -ky. \tag{139}$$

Man kennt die allgemeine, also mit vier willkürlichen Konstanten behaftete Lösung dieser Differentialgleichung vierter Ordnung. Sie lautet:

$$y = C_1e^{\alpha x}\cos\alpha x + C_2e^{\alpha x}\sin\alpha x + C_3e^{-\alpha x}\cos\alpha x \\ + C_4e^{-\alpha x}\sin\alpha x, \tag{140}$$

worin die C die willkürlichen Konstanten sind, während mit α zur Abkürzung der Absolutbetrag von

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{k}{4E\Theta}} \tag{141}$$

bezeichnet ist. Daß die Lösung die Differentialgleichung (139) befriedigt, erkennt man durch Einsetzen in diese Gleichung, und daß sie zugleich die allgemeinste Lösung ist, folgt daraus, daß sie vier unbestimmte Konstanten enthält.

Es bleibt uns jetzt nur noch übrig, die Konstanten mit Hilfe der Grenzbedingungen, die bei der Aufgabe vorgeschrieben sind, zu bestimmen. Dabei ist zu beachten, daß die ganze elastische Linie der Schwelle in drei gesonderte Äste zerfällt, von denen der erste von 0 bis a reicht, der zweite zwischen die beiden Schienen fällt und der dritte das über die rechte Schiene hinausragende Stück der Schwelle umfaßt. Der Symmetrie wegen genügt es indessen, wenn wir hier nur den ersten Ast und die bis zur Symmetrieachse reichende Hälfte des zweiten Astes ins Auge fassen.

Für alle Äste gilt im allgemeinen die Lösung (140); die Konstanten C sind aber den verschiedenen Anfangsbedingungen entsprechend bei den einzelnen Ästen verschieden. Wir haben also hier im ganzen acht bisher unbestimmt gebliebene Konstanten den Grenzbedingungen entsprechend zu wählen. Dazu stehen uns auch in der Tat acht Bedingungsgleichungen zur Verfügung. Zunächst wissen wir, das für $x = 0$ sowohl M als V verschwinden. Mit M ist aber überall $\frac{d^2y}{dx^2}$ und mit V ist $\frac{d^3y}{dx^3}$ proportional; beide Differentialquotienten sind also für $x = 0$ gleich Null zu setzen. Der besseren Übersicht wegen stelle ich hier die drei ersten Differentalquotienten von y nach Gl. (140) zusammen. Man findet:

$$\frac{dy}{dx} = \alpha\{C_1(e^{\alpha x}\cos\alpha x - e^{\alpha x}\sin\alpha x) + C_2(e^{\alpha x}\sin\alpha x + e^{\alpha x}\cos\alpha x)$$
$$+ C_3(-e^{-\alpha x}\cos\alpha x - e^{-\alpha x}\sin\alpha x)$$
$$- C_4(-e^{-\alpha x}\sin\alpha x + e^{-\alpha x}\cos\alpha x)\},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \alpha^2\{-2C_1e^{\alpha x}\sin\alpha x + 2C_2e^{\alpha x}\cos\alpha x + 2C_3e^{-\alpha x}\sin\alpha x$$
$$- 2C_4e^{-\alpha x}\cos\alpha x\},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \alpha^3\{-2C_1(e^{\alpha x}\sin\alpha x + e^{\alpha x}\cos\alpha x)$$
$$+ 2C_2(e^{\alpha x}\cos\alpha x - e^{\alpha x}\sin\alpha x)$$
$$+ 2C_3(-e^{-\alpha x}\sin\alpha x + e^{-\alpha x}\cos\alpha x)$$
$$+ 2C_4(e^{-\alpha x}\cos\alpha x + e^{-\alpha x}\sin\alpha x)\}.$$

Die Bedingung, daß $\frac{d^2y}{dx^2}$ für $x = 0$ verschwinden soll, liefert

daher die Gleichung

$$C_4 = C_2 \tag{142}$$

und aus $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$ für $x = 0$ folgt

$$C_1 = C_2 + C_3 + C_4. \tag{143}$$

Zur Abkürzung führen wir ferner die Bezeichnungen ein

$$e^{\alpha a} \cos \alpha a = m_1; \quad e^{\alpha a} \sin \alpha a = m_2; \quad e^{-\alpha a} \cos \alpha a = m_3;$$
$$e^{-\alpha a} \sin \alpha a = m_4$$

und die vier Konstanten, die in der Gleichung des zweiten Astes der elastischen Linie auftreten, werden der Reihe nach C_5 bis C_8 geschrieben. Nun müssen sich beide Äste so aneinander schließen, daß sie für $x = a$ gleiches y und auch gleiches $\frac{dy}{dx}$ geben, denn ein Knick der elastischen Linie kann an dieser Stelle nicht auftreten. Aber auch $\frac{d^2y}{dx^2}$ muß an der Anschlußstelle für beide Äste gleich sein, da sich das Biegungsmoment M nicht sprungweise ändert. Damit erhalten wir die drei Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
&C_1 m_1 + C_2 m_2 + C_3 m_3 + C_4 m_4 = C_5 m_1 + C_6 m_2 + C_7 m_3 \\
&\qquad + C_8 m_4, \\
&C_1(m_1 - m_2) + C_2(m_1 + m_2) - C_3(m_3 + m_4) \\
&\qquad + C_4(m_3 - m_4) = C_5(m_1 - m_2) + C_6(m_1 + m_2) \\
&\qquad - C_7(m_3 + m_4) + C_8(m_3 - m_4), \\
&- C_1 m_2 + C_2 m_1 + C_3 m_4 - C_4 m_3 = - C_5 m_2 \\
&\qquad + C_6 m_1 + C_7 m_4 - C_8 m_3.
\end{aligned}\right\} \tag{144}$$

Der dritte Differentialquotient von y ist dagegen an der Anschlußstelle für beide Äste von verschiedener Größe, denn man hat

$$V = \frac{dM}{dx} = - E\Theta \frac{d^3y}{dx^3}$$

und die Scherkraft V erleidet an der Übergangsstelle eine plötzliche Änderung um den Betrag $-P$. Wenn man also für den Augenblick die Ordinate des ersten Astes mit y_{I}, die des zweiten mit y_{II} bezeichnet, so besteht an der Übergangsstelle die Beziehung

$$\left[\frac{d^3y_{\mathrm{II}}}{dx^3} - \frac{d^3y_{\mathrm{I}}}{dx_3}\right]_{x=a} = \frac{P}{E\Theta}$$

oder, wenn man die Werte der Differentialquotienten einsetzt,

$$(C_1 - C_5)(m_1 + m_2) + (C_6 - C_2)(m_1 - m_2) + (C_7 - C_3)(m_3 - m_4) + (C_8 - C_4)(m_3 + m_4) = \frac{P}{2\alpha^3 E\Theta}. \tag{145}$$

Endlich seien die Werte, die man erhält, wenn man in den Ausdrücken für $m_1, m_2, \ldots$ die Abszisse a durch die Abszisse l (entsprechend der Schwellenmitte) ersetzt, mit n_1, n_2 u. s. f. bezeichnet. In der Symmetrieachse muß zunächst $\frac{dy}{dx} = 0$ werden, ferner aber auch $\frac{d^3y}{dx_3}$, weil hier $V = 0$ ist. Man hat also noch die beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} C_5(n_1 - n_2) + C_6(n_1 + n_2) - C_7(n_3 + n_4) + C_8(n_3 - n_4) = 0 \\ - C_5(n_1 + n_2) + C_6(n_1 - n_2) + C_7(n_3 - n_4) + C_8(n_3 + n_4) = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{146}$$

Alle in den acht Bedingungsgleichungen (142) bis (146) vorkommenden Größen sind bis auf die Unbekannten C in einem konkreten Falle numerisch gegebene Werte; man kann daher diese Gleichungen ersten Grades ohne weiteres nach den acht Unbekannten auflösen und kennt dann nach Gl. (140) die Gestalt der beiden Äste der elastischen Linie. Auch das Gesetz der Druckverteilung ist damit nach Gl. (138) gegeben.

Wenn man eine solche Untersuchung zu praktischen Zwecken durchführt, wird man die Mühe, acht Gleichungen ersten Grades nach den Unbekannten aufzulösen, nicht sonderlich scheuen, denn die Rechnung braucht nur einmal oder nur wenige Male wiederholt zu werden, um einen klaren Überblick über das Verhalten der Querschwelle unter verschiedenen Umständen zu verschaffen. Man wird sich also namentlich Rechenschaft darüber geben können, wie lang man die Schwelle zweckmäßigerweise beiderseits über die Schienen vorstehen lassen soll, wie stark sie zu machen ist u. s. f. Da die Querschwelle im Eisenbahnbau ein Konstruktionselement bildet, das sich so ungemein häufig in derselben Form wiederholt, liegt nichts daran, wenn sich ein Rechner einmal einige Tage damit abmühen muß, sofern man nur irgend einen Vorteil von einer klaren Einsicht in der Kraftverteilung erhoffen darf. Hier aber noch weiter auf die Frage einzugehen, hätte keinen Zweck, nachdem alle prinzipiellen Schwierigkeiten aus dem Wege geräumt sind, so daß sich der Leser jetzt selbst ohne fernere Anleitung weiter helfen kann. — Einige Ausrechnungen kommen überdies unter den Aufgaben am Ende des Abschnitts vor.

§ 46. **Lösung der vorigen Aufgabe auf graphischem Wege.**

An Stelle der durch Gl. (137) oder Gl. (139) ausgesprochenen Bedingung kann man das Gesetz, dem die elastische Linie der Schwelle unterworfen ist, auch geometrisch zum Ausdrucke bringen. Die elastische Linie einer vorher geraden Stabes kann nämlich, wie in der graphischen Statik gezeigt wird, als ein zweites Seilpolygon gefunden werden, das zu der gegebenen Belastungsfläche gehört. Die durch jene Differentialgleichungen zum Ausdrucke gebrachte Bedingung kommt dann darauf hinaus, daß das zweite Seilpolygon und die Belastungsfläche verhältnisgleiche Ordinaten haben müssen. Geometrisch gesprochen, handelt es sich also um die Lösung der Aufgabe, eine solche Gestalt der Belastungsfläche (also der Funktion p) ausfindig zu machen, die bei passender Wahl des Maßtabes mit ihrem eigenen zweiten Seilpolygon zusammenfällt.

Wenn man nun auch keine direkte Methode für die graphische Lösung dieser Aufgabe angeben kann, so kann sie doch sehr leicht auf indirektem Wege, nämlich durch Probieren (nach der „regulsa falsi“) gefunden werden. Man sucht sich nämlich zunächst ein ungefähres Bild von der zu erwartenden Druckverteilung zu verschaffen. Dazu reicht schon aus, daß der Druck unterhalb der Schiene jedenfalls am größten sein wird, und daß er von da aus sowohl nach der Schwellenmitte als nach außen hin allmählich abnimmt. Dem entsprechend zeichnet man zur Probe eine Belastungsfläche (d. h. eine graphische Darstellung der Druckverteilung p) hin, die sonst ganz willkürlich gewählt werden darf. Dann probiert man, ob man mit dieser Vermutung das Rechte getroffen hat, d. h. man konstruiert das zweite Seilpolygon dazu und trägt dessen Schlußlinie horizontal in solcher Höhe ein, daß der Flächeninhalt mit dem der Belastungsfläche übereinstimmt. Im allgemeinen wird man zunächst eine starke Abweichung in der Gestalt beider Kurven finden. Dann ändert man die zuerst gezeichnete Belastungsfläche so ab, daß sich die Lastverteilung jetzt mehr der Gestalt der gefundenen elastischen Linie nähert

und wiederholt das Verfahren für diese zweite Annahme. Die Übereinstimmung zwischen Belastungsfläche und zugehöriger elastischer Linie wird jetzt besser werden und nach mehrmaliger Wiederholung findet man mit hinreichender Genauigkeit die wirkliche Druckverteilung.

Dieses graphische Verfahren hat den Vorteil, daß es auch dann noch bequem anwendbar bleibt, wenn der Querschnitt nicht konstant ist (z. B. bei eisernen Querschwellen), da man auch für diesen Fall die Gestalt der zu einer angenommenen Belastungsfläche gehörigen elastischen Linie ohne Schwierigkeit auf graphischem Wege ermitteln kann. — Eine Unterscheidung zwischen den einzelnen Ästen der elastischen Linie braucht hier natürlich nicht gemacht zu werden, da es bei dem graphischen Verfahren ganz gleichgültig ist, wenn irgendwo ein Sprung in dem Werte des dritten Differentialquotienten von y auftritt.

§ 47. Aufgaben ähnlicher Art.

An den Bedingungen, denen der Stab unterworfen ist, wird nicht viel geändert, wenn er nicht gleichmäßig seiner ganzen Länge nach, sondern in einzelnen Punkten unterstützt ist, die in kleinen, unter sich gleichen Abständen aufeinander folgen. Voraussetzung ist nur, daß jede dieser Stützen unter demselben Drucke um gleichviel nachgibt. Solche Fälle kommen öfters vor. Man denke sich z. B. eine Brückenkonstruktion, die aus einer Anzahl ziemlich dicht nebeneinander liegender Hauptträger gebildet wird, auf die sich die der ganzen Brückenbreite nach durchlaufenden Querträger stützen. Die Verteilung des Druckes vom Querträger, wenn dieser irgend eine Einzellast (oder auch mehrere) trägt, auf die einzelnen Hauptträger befolgt dann ungefähr dasselbe Gesetz, das durch die in § 45 gegebene Lösung dargestellt wird.

Ein anderer Fall wird durch Abb. 56 angegeben. Durch einen Holzbalken ist ein Loch gebohrt, durch das ein Schraubenbolzen gut passend gesteckt ist. Außen greifen zwei Eisenlaschen an, die durch den Bolzen mit dem Balken verbunden

sind und die durch dessen Vermittelung eine Belastung auf den Balken übertragen. Unter dem Einflusse der Belastung biegt sich der Bolzen etwas; dieser Biegung widersetzt sich das Holz und es tritt nun ein Druck des Holzes gegen den Bolzen auf, der in der Mitte nach abwärts und an den Seiten nach aufwärts gerichtet ist. Man kann auch hier näherungsweise den Druck proportional der Zusammendrückung setzen, die das Holz an der betreffenden Stelle erfährt. Von dem Falle der Eisenbahnschwelle in der Bettung weicht der hier vorliegende nur insofern ab, als dort nur Druckkräfte in einer Richtung, hier aber auch solche in der entgegengesetzten Richtung übertragen werden können. Gl. (140) gibt aber auch in diesem Falle ohne weiteres die allgemeine Gestalt der elastischen Linie und damit das allgemeine Gesetz der Druckübertragung an. Die Konstanten C bestimmen sich aus den Bedingungen, daß an beiden Enden $\frac{d^2y}{dx^2}$ gleich Null und $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{P}{E\Theta}$ bezw. gleich $-\frac{P}{E\Theta}$ werden muß.

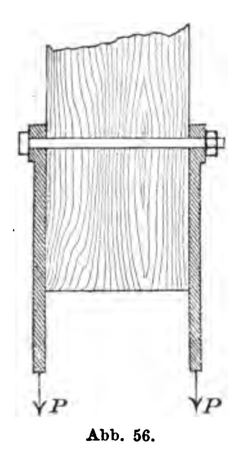


Abb. 56.

Wenn auf einen Mauerkörper an einer Stelle eine größere Last, z. B. der Auflagerdruck eines Brückenträgers übertragen werden soll, muß man die zunächst ziemlich konzentriert auftretende Belastung mit Hilfe einer großen Eisenplatte über eine Mauerwerksfläche verteilen, die so groß ist, daß die Festigkeit der Steine nirgends überschritten wird. Auch zur Abschätzung des Druckverteilungsgesetzes in diesem Falle geben die vorausgehenden Betrachtungen einen Anhaltspunkt. Man möchte in diesem Falle eine möglichst gleichmäßige Druckverteilung herbeiführen. Dazu gehört natürlich in erster Linie eine möglichst genaue, satte Auflagerung der Platte, also die Erfüllung der Voraussetzung, von der die hier durchgeführten Betrachtungen ausgingen. Außerdem wird man aber die Druckverteilung um so mehr der gleichförmigen nähern können, je stärker man das Trägheitsmoment des Querschnitts

der Platte namentlich nach der Mitte hin wählt. Ein Fall dieser Art wird in einer der folgenden Aufgaben behandelt.

Aufgaben.

33. Aufgabe. Eine Schiene, die hinreichend lang ist, um sie als unendlich lang betrachten zu können, ist ihrer ganzen Länge nach satt auf den Erdboden aufgelegt und wird in der Mitte durch eine Einzellast P belastet. Nach welchem Gesetze verteilt sich der Druck auf den Boden?

Lösung. Wir legen hier besser das Koordinatensystem so, daß die Abszissen x von der belasteten Stelle aus nach rechts hin zählen. Dadurch wird an der Gültigkeit der Gl. (135) und (136) und der daraus folgenden nichts geändert. Folglich bleibt auch Gl. (140) unmittelbar anwendbar und es handelt sich nur noch um die Bestimmung der Integrationskonstanten aus den Grenzbedingungen. Für $x = \infty$ muß y verschwinden, daher müssen die Konstanten C_1 und C_2 hier gleich Null gesetzt werden. Für $x = 0$ wird ferner der Symmetrie wegen $\frac{dy}{dx} = 0$ und daraus folgt $C_3 = C_4$. Zunächst bleibt also die Gleichung der Kurve

$$y = C_3 e^{-\alpha x}(\cos \alpha x + \sin \alpha x)$$

und für die Druckverteilung hat man nach Gl. (138)

$$p = k C_3 e^{-\alpha x}(\cos \alpha x + \sin \alpha x).$$

Das Gesetz, nach dem sich der Druck der Länge nach verteilt, ist hiermit schon gegeben. Man erkennt zunächst, daß p auch negativ wird, nämlich sobald x bis über den Wert

$$x = \frac{3\pi}{4\alpha}$$

angewachsen ist und weiterhin wieder. An der Stelle $x = \frac{3\pi}{4\alpha}$ ist der Faktor $e^{-\alpha x}$ auf 0,094 des Wertes 1 an der Stelle $x = 0$ gesunken und er nimmt dann weiterhin schnell ab. Wir wollen annehmen, daß das Gewicht der Schiene hinreiche, um an den Stellen, wo p nach der Formel negativ wird, ein Abheben der Schiene von dem Boden zu verhindern oder auch, daß die Schiene an dem Boden befestigt ist. Wir können dann die vorher abgeleitete Gleichung überall als gültig betrachten. Der unbekannte konstante Faktor kC_3, der noch darin vorkommt, hat die Bedeutung des Druckes p_0 an der Stelle $x = 0$. Um diesen zu ermitteln, beachten wir, daß

$$\int_0^\infty p\,dx = \frac{P}{2}$$

sein muß. Die andere Hälfte der Last P kommt nämlich auf die nach links gelegene Schienenhälfte. Setzt man p in diese Gleichung ein und integriert, so wird

$$\int_0^\infty p\,dx = p_0 \int_0^\infty e^{-\alpha x}(\cos\alpha x + \sin\alpha x)\,dx = p_0\left[-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha x}\cos\alpha x\right]_0^\infty = \frac{p_0}{\alpha}.$$

Demnach wird

$$p_0 = \frac{\alpha P}{2},$$

während α durch Gl. (141) bestimmt ist. Damit kennt man den Druck an jeder Stelle, vorausgesetzt, daß die Bettungsziffer k, das Trägheitsmoment des Schienenquerschnitts, der Elastizitätsmodul E und die Last P gegeben sind.

34. *Aufgabe. Eine Stange aus Flußeisen von 80 cm Länge und quadratischem Querschnitte von 6 cm Seite liegt satt auf dem Erdboden auf und trägt in der Mitte eine Last von 1000 kg. Wie groß ist der Druck, den die Stange in der Mitte und an den Enden auf den Erdboden ausübt und wie groß ist die Beanspruchung des Eisens, wenn der Boden unter einer Belastung von 1 kg auf 1 qcm eine elastische Einsenkung von 0,25 mm erfährt?*

Lösung. Für den linken Ast der elastischen Linie benutzen wir wieder Gl. (140); den Ursprung des Koordinatensystems lassen wir mit dem linken Ende der Stange zusammenfallen. Wir können dann ohne weiteres die in den Gl. (142) und (143) ausgesprochenen Grenzbedingungen benutzen. Dazu kommt, daß für $x = a = 40$ cm der Symmetrie wegen $\frac{dy}{dx} = 0$ sein muß. Dies liefert die Bedingungsgleichung

$$C_1(m_1 - m_2) + C_2(m_1 + m_2) - C_3(m_3 + m_4) + C_4(m_3 - m_4) = 0.$$

Hiermit lassen sich die übrigen Konstanten C in einer davon ausdrücken. Um dies auch numerisch sofort ausführen zu können, berechnen wir zunächst α nach Gl. (141). Man hat hier

$$\Theta = \frac{bh^3}{12} = \frac{6^4}{12} = 108 \text{ cm}^4$$

und für Flußeisen setzen wir $E = 22 \cdot 10^5 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$. Die Konstante k ist durch Gl. (138) eingeführt; ihre Dimension ist hiernach die einer spezifischen Spannung. Denken wir uns auf 1 cm Länge

der Stange einen Druck von 1 kg/cm² übertragen, so wird $p = \frac{6\,\text{kg}}{\text{cm}}$ und die zugehörige Einsenkung y nach den Angaben der Aufgabe gleich 0,25 mm, daher ist $k = \frac{p}{y} = 240\,\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$. Für α hat man daher

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{240\,\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}}{4 \cdot 22 \cdot 10^5\,\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \cdot 108\,\text{cm}^4}} = 0{,}0224 \cdot \text{cm}^{-1}.$$

Für αa ergibt sich hieraus $\alpha a = 0{,}896$, ferner

$$e^{\alpha a} = 2{,}450, \quad e^{-\alpha a} = 0{,}408, \quad \cos\alpha a = 0{,}625, \quad \sin\alpha a = 0{,}781$$

und daher auch

$$m_1 = 1{,}530, \quad m_2 = 1{,}912, \quad m_3 = 0{,}255, \quad m_4 = 0{,}319.$$

Die Gleichungen zwischen den Konstanten C lauten also jetzt

$$C_2 = C_4; \qquad C_1 = C_3 + 2\,C_4;$$
$$-\,0{,}382\,C_1 + 3{,}442\,C_2 - 0{,}574\,C_3 - 0{,}064\,C_4 = 0,$$

aus denen folgt:

$$C_1 = 4{,}73\,C_4; \quad C_2 = C_4; \quad C_3 = 2{,}73\,C_4.$$

Die Gleichung der elastischen Linie schreibt sich daher jetzt

$$y = C_4\{4{,}73\,e^{\alpha x}\cos\alpha x + e^{\alpha x}\sin\alpha x + 2{,}73\,e^{-\alpha x}\cos\alpha x + e^{-\alpha x}\sin\alpha x\}$$

und für den auf die Längeneinheit bezogenen Druck p hat man

$$p = k\,C_4\{4{,}73\,e^{\alpha x}\cos\alpha x + e^{\alpha x}\sin\alpha x + 2{,}73\,e^{-\alpha x}\cos\alpha x + e^{-\alpha x}\sin\alpha x\}.$$

Die Bedeutung des konstanten Faktors $k\,C_4$ vor der Klammer folgt daraus sofort: für $x = 0$ nimmt der Ausdruck in der Klammer den Wert 7,46 an, man hat also

$$k\,C_4 = \frac{p_0}{7{,}46}.$$

Für $x = a$, also für die Mitte des Stabes, sei der Druck p mit p_a bezeichnet. Die Formel liefert dafür

$$p_a = \frac{p_0}{7{,}46}\{4{,}73\,m_1 + m_2 + 2{,}73\,m_3 + m_4\}$$

oder nach Einsetzen der für die m gefundenen Werte

$$p_a = 1{,}36\,p_0.$$

Damit ist zunächst ermittelt, in welchem Verhältnisse der Druck p von der Mitte aus nach den Enden des Stabes hin abnimmt. Um die absoluten Beträge zu finden, machen wir, wie bei der vorigen Aufgabe von der Bedingung Gebrauch, daß die Summe aller Druckkräfte auf den Erdboden gleich der Last von 1000 kg sein muß. Dazu wäre es vollständig ausreichend, das Druckverteilungsgesetz weiterhin durch ein anderes, etwa durch ein parabolisches zu ersetzen, das mit dem gefundenen in dem Verhältnisse $\frac{p_a}{p_0}$ übereinstimmt, das es sich ja nur um eine Näherungsrechnung handelt. Es steht aber auch nichts im Wege, die Integrationen an dem Ausdrucke für p unmittelbar auszuführen. Man findet

$$\alpha\int_0^a e^{\alpha x}\cos\alpha x\,dx = 1{,}222; \qquad \alpha\int_0^a e^{\alpha x}\sin\alpha x\,dx = 0{,}691;$$

$$\alpha\int_0^a e^{-\alpha x}\cos\alpha x\,dx = 0{,}532; \qquad \alpha\int_0^a e^{-\alpha x}\sin\alpha x\,dx = 0{,}213\,.$$

Hiermit wird aber

$$\int_0^a p\,dx = \frac{p_0}{7{,}46}\cdot\frac{4{,}73\cdot 1{,}222 + 0{,}691 + 2{,}73\cdot 0{,}532 + 0{,}213}{0{,}0224} = 48{,}7\,p_0.$$

Als Längeneinheit gilt hier 1 cm, denn α ist in dieser Einheit ausgedrückt. Das Doppelte des berechneten Integrals ist gleich 1000 kg, daraus folgt

$$p_0 = \frac{1000}{97{,}4} = 10{,}3\frac{\text{kg}}{\text{cm}} \quad\text{und}\quad p_a = 14{,}0\frac{\text{kg}}{\text{cm}}.$$

Hätte man das parabolische Verteilungsgesetz angenommen, also

$$p = p_0 + \frac{p_a - p_0}{a^2}(2ax - x^2)$$

gesetzt, so hätte sich ergeben

$$\int_0^a p\,dx = \frac{p_0 + 2p_a}{3}\cdot a = 49{,}6\,p_0,$$

also nicht viel mehr wie bei der genaueren Rechnung. Wir wollen daher das parabolische Verteilungsgesetz bei der Berechnung des Biegungsmoments M_a in der Mitte zugrunde legen. Man findet dann

$$M_a = \int_0^a (a - x)p\,dx = \frac{p_0 + 2p_a}{3}a^2 - \frac{5p_a + p_0}{12}a^2 = \frac{p_a + p_0}{4}a^2$$

oder nach Einsetzen der Zahlenwerte

$$M_a = 9560 \text{ cm kg}$$

und hiermit die Beanspruchung des Materials

$$\sigma = \frac{6 M_a}{b h^2} = \frac{6 \cdot 9560}{6^3} = 266 \text{ atm.}$$

Übrigens hätte M_a ohne Schwierigkeit auch mit Hilfe der Beziehung

$$M_a = - E\Theta \left[\frac{d^2 y}{d x^2}\right]_{x=a}$$

ermittelt werden können.

35. *Aufgabe. Ein Stab von der Länge 2a liegt satt auf dem Boden auf und wird in der Mitte mit P belastet. Der Querschnitt ist ein Rechteck von überall gleicher Breite, dessen Höhe aber nach der Mitte zu in solcher Art anwachsen soll, daß das Trägheitsmoment überall proportional dem Biegungsmomente M ist. Man soll das Gesetz der Druckverteilung ermitteln und angeben, wie die Querschnittshöhe nach der Mitte hin anwachsen muß, damit die Bedingung der Aufgabe erfüllt wird.*

Lösung. Die Gleichung der elastischen Linie läßt sich hier in der Form

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = - \frac{M}{E\Theta} = - c$$

anschreiben, in der c eine Konstante ist, die unbestimmt bleiben muß, weil keine Angabe über den Proportionalitätsfaktor von M und Θ gemacht ist. Durch Integration folgt

$$y = - c \frac{x^2}{2} + K_1 x + K_2 .$$

Für $x = a$ muß $\frac{dy}{dx} = 0$ sein und daraus folgt $K_1 = ca$. Man findet also

$$p = ky = kK_2 + \frac{ck}{2}(2ax - x^2).$$

Das Druckverteilungsgesetz ist also hier genau parabolisch; für den Druck am Ende und in der Mitte hat man

$$p_0 = kK_2 ; \quad p_a = kK_2 + \frac{cka^2}{2}$$

und daher auch

$$p = p_0 + \frac{p_a - p_0}{a^2}(2ax - x^2),$$

wie bei der vorigen Aufgabe; daher ist auch wie dort

$$\frac{p_0 + 2p_a}{2}\,a = \frac{P}{2}$$

und hieraus folgt

$$p_0 = \frac{P}{2a} - \frac{cka^2}{3}; \quad K_2 = \frac{P}{2ak} - \frac{ca^2}{3}.$$

Wenn c und k gegeben sind, kennt man hiermit die genaue Gestalt der elastischen Linie. Für das Biegungsmoment im Abstande x vom Ende folgt:

$$M = \int_0^x (x-u)p\,du = \frac{p_0 x^2}{2} + (p_a - p_0)\frac{4ax^3 - x^4}{12a^2}$$

und hieraus Θ mit Hilfe der Beziehung $\Theta = \frac{M}{Ec}$. Mit Θ ist auch die Höhe des Querschnitts als Funktion von x bestimmt.

Siebenter Abschnitt.

Die Festigkeit von ebenen Platten, die am ganzen Umfange untérstützt sind.

§ 48. Genauere Theorie der kreisförmigen Platte mit symmetrischer Belastung.

Als Belastung nehme ich hier entweder eine Einzellast in der Mitte oder einen gleichförmig über die ganze Fläche verteilten Druck an, obschon die Aufgabe in ganz gleicher Weise auch für eine andere Lastverteilung gelöst werden kann, wenn diese nur symmetrisch ist, d. h. wenn sie in gleichen Abständen von der Mitte ringsum gleich ist. Für andere Lastverteilungen wird die Rechnung zu verwickelt; man ist dann in der Praxis auf eine Schätzung angewiesen. Glücklicherweise kommen aber die Fälle der symmetrischen Lastverteilung weitaus am häufigsten vor.

Ferner setze ich voraus, daß auch die Stützung der Platte am Rande überall in der gleichen Weise erfolgt und zwar entweder so, daß die Platte am Rande eingeklemmt ist, oder so, daß sie frei aufliegt. Der letzte Fall ist im Gegensatze zur Biegungstheorie des Balkens schwieriger zu behandeln, als der andere. Bei der frei aufliegenden Platte beteiligen sich nämlich auch die über den Auflagerkreis hinausreichenden Teile der Platte an der Kraftübertragung und es ist daher keineswegs gleichgültig, um wieviel die Platte übersteht. Ich werde indessen annehmen, daß sie nur wenig übersteht, so

daß die Spannungen in dem überstehenden Teile unberücksichtigt bleiben können.

Von vornherein ist klar, daß die Untersuchung in einer gewissen Verwandtschaft mit der Biegungstheorie des Balkens steht und in der Tat lehnt sich die Betrachtung im großen ganzen an die dort durchgeführte an. An die Stelle der elastischen Linie tritt hier die elastische Fäche, in die die Mittelebene der Platte (so soll die in der halben Plattendicke parallel zu den Grenzflächen gezogene Ebene genannt werden) durch die Formänderung übergeführt wird. Wie früher beim Balken nehmen wir an, daß die Ordinaten y der elastischen Fläche, von der ursprünglichen Lage der Mittelebene an gerechnet, klein bleiben. Der Symmetrie wegen hängt y nur von dem Abstande x von der Symmetrieachse (d. h. von der im Mittelpunkte der Mittelebene zu dieser errichteten Senkrechten) ab; die elastische Fläche ist also eine Umdrehungsfläche. Dann sollen auch die etwa parallel zur Mittelebene auftretenden elastischen Verschiebungen von Punkten der Mittelebene gegenüber den Ordinaten y vernachlässigt werden, wie es schon beim Balken geschehen ist.

Auch eine Voraussetzung über die besondere Art der Formänderung, die der Bernoullischen Annahme, daß die Querschnitte des Balkens bei der Biegung eben bleiben, entspricht, ist hier erforderlich. Wir setzen als hinreichend genau zutreffend voraus, daß alle Punkte der Platte, die vorher auf einer zur Mittelebene senkrecht gezogenen Geraden lagen, auch nach der Formänderung noch auf einer Geraden liegen, die der Symmetrie wegen die Symmetrieachse der Platte schneiden muß (wenn sie nicht parallel zu ihr bleibt). Ein ringförmig um die Symmetrieachse gezogener zylindrischer Schnitt, der etwa dem Querschnitte beim Balken entspricht, soll also durch die Formänderung nur in eine Kegelfläche übergehen können.

Nach diesen Festsetzungen müssen wir, wie es früher beim Balken geschehen ist, zunächst einen Ausdruck für die Längenänderungen aufstellen, die bei der Biegung eintreten, und daraus einen Schluß über die Spannungsverteilung ziehen. In

einem Punkte, der den Abstand x von der Symmetrieachse und den Abstand z von der Mittelebene hat (vgl. Abb. 57), treten Dehnungen in tangentialer und in radialer Richtung auf, die wir mit ε_t und ε_r bezeichen. Der durch den Punkt gehende Kreis vom Radius x hat sich nämlich wegen der Neigung φ, die die Normale zur elastischen Fläche gegen die Symmetrieachse angenommen hat, um den Betrag $z\varphi$ vergrößert. Der Neigungswinkel φ wird als hinreichend klein

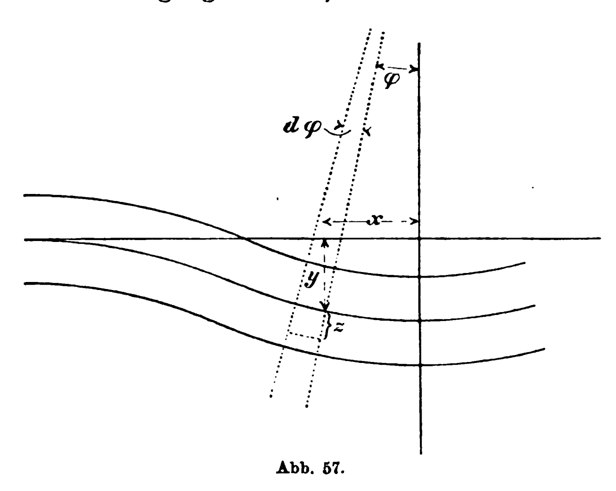


Abb. 57.

vorausgesetzt, um den Bogen an Stelle des Sinus nehmen zu können. In demselben Verhältnisse wie der Radius wächst auch der Umfang eines Kreises und hierdurch kommt die spezifische Dehnung ε_t in tangentialer Richtung zustande. Man hat daher

$$\varepsilon_t = \frac{z\varphi}{x}. \tag{147}$$

Um die Dehnung in radialer Richtung zu ermitteln, ziehe ich im Abstande dx eine zweite Normale zur elastischen Fläche. Der Winkel zwischen beiden Normalen ist mit $d\varphi$ zu bezeichnen. Die durch den Punkt z gehende Faser ist zwischen beiden Normalen um $z\,d\varphi$ länger geworden, als die Faser in der Mittelebene, die unverändert blieb. Die bezogene Dehnung ε_r folgt daraus durch Division mit der ursprüng-

lichen Länge dx, also

$$\varepsilon_r = \frac{z\,d\varphi}{dx}. \tag{148}$$

Dieser letzte Ausdruck entspricht genau dem früher für den Balken festgestellten; dagegen kommt bei der Platte die Dehnung ε_t hinzu, die beim Balken gleichgültig blieb. Es treten daher hier neben den Spannungen in radialer Richtung σ_r (entsprechend den Biegungsspannungen des Balkens) auch noch solche in tangentialer Richtung σ_t auf, die mit den Dehnungen nach dem Elastizitätsgesetze durch die Gleichungen

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E}\left(\sigma_t - \frac{1}{m}\sigma_r\right); \quad \varepsilon_r = \frac{1}{E}\left(\sigma_r - \frac{1}{m}\sigma_t\right)$$

zusammenhängen. Durch Auflösen dieser Gleichungen nach σ_t und σ_r erhält man

$$\sigma_t = \frac{mE}{m^2-1}(m\varepsilon_t + \varepsilon_r); \quad \sigma_r = \frac{mE}{m^2+1}(m\varepsilon_r - \varepsilon_t), \tag{149}$$

oder nach Einführung der Werte für die Dehnungen aus den Gleichungen (147) und (148)

$$\sigma_t = \frac{mE}{m^2-1}z\left(m\frac{\varphi}{x} + \frac{d\varphi}{dx}\right); \quad \sigma_r = \frac{mE}{m^2-1}z\left(m\frac{d\varphi}{dx} + \frac{\varphi}{x}\right). \tag{150}$$

Die Spannungsverteilung längs einer Normalen, sowohl die von σ_r als die von σ_t, befolgt daher ein lineares Gesetz; die Spannungen sind den Abständen von der Mittelebene proportional.

Nachdem diese Ausdrücke für die Spannungen ermittelt sind, müssen wir das Gleichgewicht eines Plattenelementes untersuchen. Zu diesem Zwecke denke ich mir durch die Symmetrieachse zwei Meridianebenen gelegt, die einen beliebigen unendlich kleinen Winkel $d\alpha$ miteinander bilden; von der Formänderung bleibt dieser unberührt. Zwischen beiden Ebenen lege ich ferner zwei zylindrische Schnitte mit den Radien x und $x + dx$. Hierdurch wird das in Abb. 58 in Aufriß und Grundriß gezeichnete Plattenelement abgegrenzt. An den vier Schnittflächen treten zunächst die Spannungen σ_r und σ_t auf, die sich an jeder Schnittfläche zu einem Kräftepaare zusammen-

setzen lassen. Außerdem kommen aber an den zylindrischen Schnittflächen noch die Schubspannungen τ vor, durch die die Last im mittleren Teile der Platte nach dem Auflager übertragen wird. Wir haben eine Gleichung aufzustellen, durch die die Bedingung für das Gleichgewicht aller dieser Kräfte an dem Plattenelemente znm Ausdrucke gebracht wird.

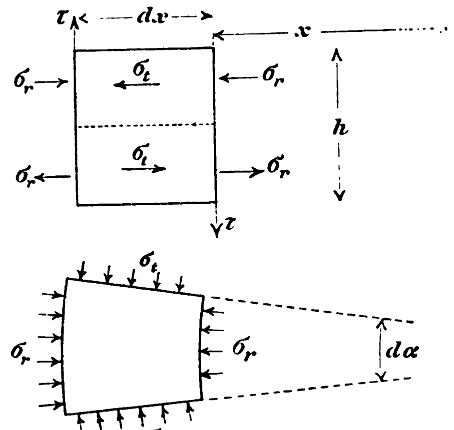


Abb. 58.

Zunächst fasse ich die Spannungen σ_t ins Auge. Zu jedem Flächenelemente dF des einen Meridianschnittes gehört ein Flächenelement des anderen, in dem die Spannung σ_t ebenso groß ist. Die Richtungslinien beider Kräfte $\sigma_t dF$ schneiden sich in der Symmetrieebene des Plattenelementes und ich will mir beide an diesem Angriffspunkte zu einer Resultierenden vereinigt denken. Diese fällt selbst in die Symmetrieebene und sie hat die Größe $\sigma_t dF \cdot d\alpha$. In der Symmetrieebene lassen sich alle diese Kräfte, die zu den verschiedenen Flächenelementen dF eines Meridianschnittes gehören, zu einem resultierenden Kräftepaare vereinigen, dessen Moment leicht festgestellt werden kann. Für einen auf der Mittelebene gelegenen Momentenpunkt hat nämlich die Kraft $\sigma_t dF d\alpha$ das Moment $\sigma_t z dF d\alpha$ und im ganzen ist daher, mit Berücksichtigung von Gl. (150),

$$\text{Mom. der } \sigma_t = d\alpha \int \sigma_t z dF = d\alpha \frac{mE}{m^2 - 1} \left(m \frac{\varphi}{x} + \frac{d\varphi}{dx} \right) \int z^2 dF.$$

Das hier noch vorkommende Integral ist das Trägheitsmoment der Meridianschnittfläche und daher

$$\int z^2 dF = dx \frac{h^3}{12}.$$

Damit erhalten wir schließlich

$$\text{Mom. der } \sigma_t = \frac{mE}{m^2-1} \cdot \frac{h^3}{12}\left(m\frac{\varphi}{x} + \frac{d\varphi}{dx}\right) dx\, d\alpha. \qquad (151)$$

Hier muß noch eine Bemerkung über das Vorzeichen beigefügt werden. Die Ordinaten z rechnete ich nach abwärts positiv. Wenn φ und $\frac{d\varphi}{dx}$ positiv sind, treten im unteren Teile Zugspannungen σ_t auf und die Resultierende solcher Zugspannungen in beiden Meridianschnitten hat in der Symmetrieebene des Plattenelementes den Pfeil nach der Plattenmitte hin gerichtet, wie er in Abb. 58 eingetragen ist. Oben, d. h. bei negativem z, kehren sich die Richtungen um und das aus den Spannungen σ_t resultierende Kräftepaar sucht das Plattenelement entgegengesetzt dem Uhrzeigersinne zu drehen. Daher ist der in Gl. (151) festgestellte Wert des Momentes später mit negativem Vorzeichen in die Momentengleichung einzuführen.

Jetzt komme ich zu den Spannungen σ_r. In der Schnittfläche, die zum Radius x gehört, bilden die Spannungen σ_r ein Kräftepaar, dessen Moment sich mit Rücksicht auf Gl. (150) zu

$$\int \sigma_r dF z = \frac{mE}{m^2-1}\left(m\frac{d\varphi}{dx} + \frac{\varphi}{x}\right)\int z^2 dF$$

berechnet. Das Integral ist das Trägheitsmoment eines Rechteckes von der Breite $x\,d\alpha$ und der Höhe h; der vorige Ausdruck geht daher über in

$$\frac{mE}{m^2-1} \cdot \frac{h^3}{12}\left(mx\frac{d\varphi}{dx} + \varphi\right) d\alpha.$$

Dazu kommt das Kräftepaar der Spannungen σ_r an der gegenüberliegenden Schnittfläche, das den entgegengesetzten Drehsinn hat. Es kommt also nur auf den Unterschied zwischen beiden Momenten an. Dieser Unterschied ist das Differential des vorausgehenden Ausdrucks, das einem Anwachsen des

Abstandes x um dx entspricht. Durch Ausführung der Differentiation finden wir

$$\text{Mom. aller } \sigma_r = \frac{mE}{m^2-1} \cdot \frac{h^3}{12}\left(mx\frac{d^2\varphi}{dx^2} + m\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dx}\right) dx\, d\alpha. \quad (152)$$

In bezug auf das Vorzeichen ist zu bemerken, daß bei positivem φ und $\frac{d\varphi}{dx}$ die Spannungen σ_r in der unteren Hälfte Zugspannungen sind und daß das Kräftepaar im Schnitte x daher entgegengesetzt dem Uhrzeigersinne dreht. Im Schnitte $x + dx$ dreht es also im Uhrzeigersinne. Wenn das vorher berechnete Differential positiv ist, gibt es demnach ein im positiven Sinne drehendes Moment an, d. h. Mom. aller σ_r ist ohne Vorzeichenwechsel in die Momentengleichung einzuführen.

Endlich führen auch noch die Schubspannungen zu einem Kräftepaare, dessen Moment berechnet werden muß. Hier müssen wir nun eine nähere Bestimmung darüber treffen, für welche Belastung die Rechnung weiter durchgeführt werden soll, während alle vorausgehenden Betrachtungen bei jeder symmetrisch verteilten Belastung in Gültigkeit bleiben. Wir wollen jetzt annehmen, daß die Belastung in einem gleichförmig über die Fläche der Platte verteilten Drucke p auf die Flächeneinheit bestehe. Dieser Fall liegt z. B. vor, wenn ein Zylinderdeckel einem Flüssigkeitsdrucke ausgesetzt ist. — Zur Berechnung der übertragenen Scherkraft denken wir uns einen ringförmigen Schnitt mit dem Halbmesser x geführt. Der dadurch nach innen hin abgegrenzte Teil der Platte trägt dann eine Belastung von der Größe

$$\pi x^2 p$$

und ihr muß durch die Scherkräfte im Ringschnitte das Gleichgewicht gehalten werden. Auf den zwischen die beiden Meridianschnitte mit dem Zentriwinkel $d\alpha$ fallenden Teil des Ringschnittes kommt davon der Bruchteil $\frac{d\alpha}{2\pi}$, so daß also an dem Plattenelemente im Schnitte x die Scherkraft

$$\frac{x^2 p}{2} d\alpha$$

übertragen wird. Im Schnitte $x + dx$ ist die übertragene Scherkraft um ein Differential größer, so daß der Unterschied der auf das Plattenelement selbst kommenden Belastung entspricht. Bei Feststellung des Momentes kommt es aber auf den von höherer Ordnung unendlich kleinen Unterschied nicht an und wir haben

$$\text{Mom. der } \tau = \frac{x^2 p}{2}\, d\alpha\, dx. \tag{153}$$

Das Vorzeichen dieses Momentes ist, wie schon ein Blick auf Abb. 58 lehrt, positiv.

Das Gleichgewicht des Plattenelementes gegen Drehung erfordert, daß die algebraische Summe aller dieser Momente gleich Null ist, also

$$\text{Mom. der } \sigma_t + \text{Mom. aller } \sigma_r + \text{Mom. der } \tau = 0,$$

oder wenn wir die dafür berechneten Werte einführen und zugleich auf die Bemerkungen über die Vorzeichen achten,

$$-\frac{mE}{m^2-1}\cdot\frac{h^3}{12}\left(m\frac{\varphi}{x}+\frac{d\varphi}{dx}\right)+\frac{mE}{m^2-1}\cdot\frac{h^3}{12}\left(mx\frac{d^2\varphi}{dx^2}+m\frac{d\varphi}{dx}+\frac{d\varphi}{dx}\right)$$
$$+\frac{px^2}{2}=0.$$

Die gemeinsamen Faktoren $d\alpha$ und dx sind hier schon fortgehoben. Die Gleichung vereinfacht sich weiter zu

$$\frac{m^2E}{m^2-1}\cdot\frac{h^3}{12}\left(x\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d\varphi}{dx}-\frac{\varphi}{x}\right)+\frac{px^2}{2}=0.$$

Zur Abkürzung beim Anschreiben der folgenden Formeln setzen wir

$$N=\frac{6(m^2-1)}{m^2Eh^3}\,p, \tag{154}$$

so daß also N einen konstanten Wert bezeichnet, der als gegeben zu betrachten ist. Die vorige Gleichung geht dann über in

$$x^2\frac{d^2\varphi}{dx^2}+x\frac{d\varphi}{dx}-\varphi+Nx^3=0. \tag{155}$$

Man kennt die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung; sie lautet

$$\varphi=-\frac{N}{8}x^3+Bx+\frac{C}{x}, \tag{156}$$

worin B und C die beiden willkürlichen Integrationskonstanten sind. Durch Einsetzen des angegebenen Ausdrucks in Gl. (155) überzeugt man sich leicht, daß er diese Gleichung befriedigt, und daß er die allgemeinste Lösung bildet, folgt daraus, daß er zwei unbestimmte Konstanten umfaßt.

Zur Bestimmung der Integrationskonstanten aus den Grenzbedingungen dient zunächst die Bemerkung, daß φ für $x = 0$ verschwinden muß. Daher ist $C = 0$ zu setzen. Die Konstante B hängt von der Bedingung ab, der die Platte am Rande unterworfen ist. Wir wollen zunächst annehmen, daß die Platte eingespannt sei, daß also die elastische Fläche längs des Kreises $x = r$ von der horizontalen Ebene, mit der die Mittelebene ursprünglich zusammenfiel, berührt wird. Dann muß φ auch für $x = r$ verschwinden und aus

$$0 = -\frac{N}{8} r^3 + Br$$

folgt $B = \frac{N}{8} r^2$. Wir kennen jetzt φ vollständig, nämlich

$$\varphi = \frac{N}{8}(r^2 x - x^3) = \frac{3(m^2 - 1)}{4m^2 E h^3} p(r^2 x - x^3). \qquad (157)$$

Nach den Gl. (147) und (148) findet man hiermit auch die elastischen Dehnungen und damit die Beanspruchung des Materials. Durch Einsetzen erhält man

$$\varepsilon_t = \frac{N}{8}(r^2 - x^2)z; \quad \varepsilon_r = \frac{N}{8}(r^2 - 3x^2)z. \qquad (158)$$

In der Mitte der Platte, also für $x = 0$, werden ε_r und ε_t einander gleich und zwar gleich $\frac{N}{8} r^2 z$. Dies war auch von vornherein zu erwarten, denn dieselbe Dehnung, die für einen Meridianschnitt als ε_t zu bezeichnen ist, d. h. die zu dieser Meridianebene senkrecht steht, gilt hier für einen anderen Meridianschnitt, der in der Richtung der Dehnung gelegt ist, als ε_r. Nach außen zu (bei wachsendem x) nehmen sowohl ε_t als ε_r ab; am Rande wird ε_t zu Null und $\varepsilon_r = -\frac{N}{4} r^2 z$, also dem Absolutbetrage nach doppelt so groß als in der Mitte. Am Rande tritt also die größte Beanspruchung des Materials auf;

man hat zu erwarten, daß der Bruch der Platte durch die Bildung eines ringförmigen Risses längs des Auflagers eingeleitet wird. Betrachtet man, wie es gewöhnlich geschieht, die reduzierte Spannung als Maß für die Beanspruchung des Materials, so findet man für diese aus ε_r, nachdem darin $x = r$ und $z = \frac{h}{2}$ gesetzt ist, durch Multiplikation mit dem Elastizitätsmodul E

$$\sigma_{red} = E\frac{Nr^2}{4} \cdot \frac{h}{2} = \frac{3(m^2-1)}{4m^2} \cdot \frac{r^2}{h^2}p = 0{,}68\,p\,\frac{r^2}{h^2} \text{ für } m = \frac{10}{3} \cdot \quad (159)$$

Die Spannungen σ_t und σ_r kann man nach den Gl. (149) oder (150) ebenfalls sofort anschreiben, nachdem φ, bezw. die Dehnungen ε_t und ε_r ermittelt sind.

Nur die Frage nach der Gestalt der elastischen Fläche bleibt jetzt noch zu beantworten. Dazu bemerke ich, daß φ zugleich den Neigungswinkel angibt, den die Tangente an die Meridianlinie der elastischen Fläche mit der Richtung der X-Achse bildet. Mit Rücksicht auf die aus Abb. 57 einzusehenden Festsetzungen über die positiven Richtungen hat man daher

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{tg}\varphi.$$

Da der Winkel φ klein ist, kann an Stelle der Tangente auch der Winkel selbst gesetzt werden; mit Rücksicht auf Gl. (157) hat man daher

$$\frac{dy}{dx} = \frac{N}{8}(x^3 - r^2x). \quad (160)$$

Durch Integration erhält man daraus

$$y = \frac{N}{8}\left(\frac{x^4}{4} - r^2\frac{x^2}{2}\right) + C$$

und die Integrationskonstante C bestimmt sich aus der Bedingung, daß für $x = r$ die Einsenkung y zu Null werden muß. Dies liefert

$$C = \frac{Nr^4}{32}$$

und daher schließlich

$$y = \frac{N}{32}(x^4 - 2r^2x^2 + r^4) = \frac{N}{32}(x^2 - r^2)^2. \qquad (161)$$

Von besonderem Interesse ist die Einsenkung, die die Platte in der Mitte erfährt, also die Ordinate y für $x = 0$. Wir wollen sie, wie früher beim Balken, den Biegungspfeil f nennen und erhalten

$$f = \frac{Nr^2}{32}.$$

Nach Einsetzen des Wertes von N aus Gl. (154) und mit $m = \frac{10}{3}$ geht dies über in

$$f = \frac{3(m^2-1)}{16 m^2 E h^3} p r^4 = 0{,}17 \frac{pr^4}{Eh^3}. \qquad (162)$$

§ 49. Fortsetzung für den Fall einer Einzellast P in der Mitte.

Die Entwickelungen des vorigen Paragraphen bleiben gültig bis nach Gl. (152). Die Scherkraft, die in einem ringförmigen Schnitte übertragen wird, ist aber hier gleich P und auf den zu dem Plattenelemente gehörigen Teil dieses Schnittes kommt davon $P\frac{d\alpha}{2\pi}$. Für das Moment des aus den Scherspannungen gebildeten Kräftepaares hat man daher

$$\text{Mom. der } \tau = \frac{P}{2\pi} d\alpha dx \qquad (163)$$

an Stelle von Gl. (153). Die Momentengleichung, die die Bedingung für das Gleichgewicht des Plattenelementes gegen Drehen ausspricht, lautet daher hier

$$-\frac{mE}{m^2-1}\cdot\frac{h^3}{12}\left(m\frac{\varphi}{x} + \frac{d\varphi}{dx}\right) + \frac{mE}{m^2-1}\cdot\frac{h^3}{12}\left(mx\frac{d^2\varphi}{dx^2} + m\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dx}\right) + \frac{P}{2\pi} = 0,$$

woraus man, wie früher, nach Einführung der abkürzenden Bezeichnung

$$Q = \frac{6(m^2-1)P}{\pi m^2 E h^3} \qquad (164)$$

für φ die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$x^2 \frac{d^2\varphi}{dx^2} + x\frac{d\varphi}{dx} - \varphi + Qx = 0 \tag{165}$$

erhält. Auch die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist bekannt; sie lautet

$$\varphi = -\frac{Q}{2} x \lg x + Bx + \frac{C}{x}, \tag{166}$$

wie man sich durch Einsetzen leicht überzeugt. Die Integrationskonstante C muß wieder gleich Null gesetzt werden, damit φ in der Mitte zu Null wird, und für B erhält man, falls die Platte am Rande eingespannt ist, aus der Bedingung $\varphi = 0$ für $x = r$

$$B = \frac{Q}{2} \lg r.$$

Damit geht Gl. (166) über in

$$\varphi = \frac{Q}{2} x \lg \frac{r}{x}. \tag{167}$$

Aus den Gl. (147) und (148) erhält man für die spezifischen Dehnungen

$$\varepsilon_t = \frac{Q}{2} z \lg \frac{r}{x}; \quad \varepsilon_r = \frac{Q}{2} z \left(\lg \frac{r}{x} - 1\right). \tag{168}$$

Für $x = 0$ werden diese Ausdrücke unendlich groß, d. h. die Platte müßte zerbrechen, wenn es möglich wäre, den Druck P in einem einzigen Punkte zu konzentrieren, wie es bei Ableitung der Formeln vorausgesetzt war. In Wirklichkeit wird sich aber die Belastung immer auf eine kleine Fläche verteilen und die Gl. (168) sind daher zur Berechnung der Beanspruchung des Materials in der Mitte unbrauchbar. Für das Verhalten der Platte am Rande ist es dagegen gleichgültig, ob die Last genau oder nur angenähert in der Mitte konzentriert ist; wir können also die Formeln zur Berechnung der Beanspruchung am Umfange benutzen. Mit $x = r$ erhalten wir $\varepsilon_t = 0$ und $\varepsilon_r = -\frac{Q}{2} z$, also ist dort mit $z = \frac{h}{2}$ und $m = \frac{10}{3}$

$$\sigma_{\text{red}} = \frac{3(m^2-1)}{2\pi m^2} \frac{P}{h^2} = 0{,}43 \frac{P}{h^2}. \tag{169}$$

Die Beanspruchung am Rande ist also ganz unabhängig vom Radius der Platte.

Um über die tatsächlich in der Mitte zu erwartende Beanspruchung des Materials ins Klare zu kommen, nehmen wir an, daß sich die Last P über einen kleinen Kreis vom Halbmesser a gleichförmig verteile. Die Meridianlinie der elastischen Fläche setzt sich aus zwei Ästen zusammen, von denen der eine von $x = 0$ bis $x = a$ reicht und der Gl. (156) entspricht, während für den anderen von $x = a$ bis $x = r$ Gl. (166) gilt. Für den ersten Ast hat man also

$$\varphi = -\frac{N}{8} x^3 + Bx$$

und für den zweiten Ast, wenn man jetzt die Integrationskonstanten mit anderen Buchstaben bezeichnet,

$$\varphi = -\frac{Q}{2} x \lg x + Dx + \frac{F}{x}.$$

Beide Äste müssen sich ohne Knick aneinander schließen; zwischen den Konstanten B, D, F besteht daher die erste der beiden Gleichungen

$$-\frac{N}{8} a^3 + Ba = -\frac{Q}{2} a \lg a + Da + \frac{F}{a},$$

$$-\frac{3N}{8} a^2 + B = -\frac{Q}{2} \lg a - \frac{Q}{2} + D - \frac{F}{a^2}.$$

Die zweite Gleichung folgt daraus, daß zu beiden Seiten des ringförmigen Schnittes $x = a$ die Spannung σ_r nach dem Gesetze der Aktion und Reaktion von gleicher Größe sein muß. Dazu gehört aber nach Gl. (150), daß auch $\frac{d\varphi}{dx}$ an der Anschlußstelle für beide Äste gleich groß ist.

Man erhält durch Auflösen nach F und D

$$F = \frac{a^2}{8} (Na^2 - 2Q),$$

$$D = B - \frac{Na^2}{4} + \frac{Q}{4} + \frac{Q}{2} \lg a.$$

Dann muß noch beim zweiten Aste $\varphi = 0$ sein für $x = r$, also

$$0 = -\frac{Q}{2} r \lg r + Dr + \frac{F}{r}.$$

Setzt man hier die Werte von F und D ein und löst dann die Gleichung nach B auf, so erhält man

$$B = \frac{Q}{2} \lg \frac{r}{a} + \frac{Na^2}{4} + \frac{a^2}{8r^2}(2Q - Na^2) - \frac{Q}{4}.$$

Nun ist noch auf die Beziehung zu achten, die hier zwischen N und Q besteht. Der Ausdruck N in Gl. (154) geht hier, weil $p = \frac{P}{\pi a^2}$ zu setzen ist, über in

$$N = \frac{6(m^2-1)}{m^2 E h^3} \cdot \frac{P}{\pi a^2}$$

und der Vergleich mit dem Ausdrucke Q in Gl. (164), der hier keine Änderung erleidet, zeigt, daß

$$Na^2 = Q$$

ist. Für die Integrationskonstante B hat man daher auch

$$B = \frac{Q}{8}\left(4 \lg \frac{r}{a} + \frac{a^2}{r^2}\right) \tag{170}$$

und schließlich für den ersten Ast (von $x = 0$ bis $x = a$)

$$\varphi = \frac{Q}{8}\, x\left(4 \lg \frac{r}{a} + \frac{a^2}{r^2} - \frac{x^2}{a^2}\right). \tag{171}$$

Damit sind wir in den Stand gesetzt, auch die Dehnungen und die Beanspruchung des Materials in dem kleinen Mittelstücke anzugeben. Nach den Gl. (147) und (148) wird nämlich

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_t &= \frac{Q}{8}\, z\left(4 \lg \frac{r}{a} + \frac{a^2}{r^2} - \frac{x^2}{a^2}\right) \\ \varepsilon_r &= \frac{Q}{8}\, z\left(4 \lg \frac{r}{a} + \frac{a^2}{r^2} - \frac{3x^2}{a^2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{172}$$

Beide Dehnungen nehmen den größten und zwischen beiden übereinstimmenden Wert an der Stelle $x = 0$ an. Die reduzierte Spannung in der Mitte ist daher

$$\sigma_{\text{red}} = \frac{EQ}{8}\, z\left(4 \lg \frac{r}{a} + \frac{a^2}{r^2}\right)$$

oder nach Einführung des Wertes von Q und mit $z = \frac{h}{2}$

$$\sigma_{\text{red}} = \frac{3(m^2-1)}{8\pi m^2} \cdot \frac{P}{h^2}\left(4 \lg \frac{r}{a} + \frac{a^2}{r^2}\right).$$

Das letzte Glied in der Klammer kann gegen das erste vernachlässigt werden, wenn a in der Tat klein gegen r ist; hiermit und nach Einführung von $m = \frac{10}{3}$ wird

$$\sigma_{red} = 0{,}43 \frac{P}{h^2} \lg \frac{r}{a} \cdot \qquad (173)$$

Mit der Spannung am Rande würde dies übereinstimmen, wenn $r = 2{,}718\ldots a$ wäre; wenn a kleiner ist, wird aber das Material am meisten in der Mitte beansprucht. Für $a = 0{,}1\,r$ z. B. wird

$$\sigma_{red} = 1{,}00 \frac{P}{h^2}$$

und für $a = 0{,}01\,r$

$$\sigma_{red} = 1{,}98 \frac{P}{h^2} \cdot$$

Man sieht daraus, daß die Beanspruchung allerdings erheblich zunimmt, wenn sich die Last mehr konzentriert, daß aber ein Unendlichwerden, wie es nach den Gl. (168) zu erwarten gewesen wäre, in Wirklichkeit nicht zu befürchten ist. Auf besondere Zuverlässigkeit können übrigens die zuletzt angeschriebenen Formeln keinen Anspruch machen, weil in der Nähe der Lastangriffsstelle noch lokale Wirkungen und infolgedessen Abweichungen von den sonst hinreichend genau zutreffenden Annahmen über die Formänderung und die Spannungsverteilung hinzutreten, die in der Theorie nicht berücksichtigt sind. Die Formeln sollen vielmehr nur ein ungefähres Bild von der Beanspruchung geben, die man etwa zu erwarten hat.

Schließlich sei noch die Gestalt der elastischen Fläche und der Biegungspfeil für diesen Belastungsfall ermittelt Dabei ist es nicht nötig, den inneren Ast der Meridianlinie besonders zu berücksichtigen, da das Gesetz der Meridianlinie längs dieses kleinen Abschnitts nicht von merklichem Einflusse auf den Biegungspfeil sein kann. Aus Gl. (167) schließen wir, wie im vorigen Paragraphen

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{Q}{2} x \lg \frac{r}{x} \cdot \qquad (174)$$

Durch Integration folgt daraus

$$y = -\frac{Qx^2}{4} \lg r + \frac{Qx^2}{4} \lg x - \frac{Qx^2}{8} + C. \qquad (175)$$

Die Integrationskonstante bestimmt sich durch die Bedingung, daß y am Rande verschwinden muß. Daraus folgt

$$C = \frac{Qr^2}{8}$$

und man hat

$$y = Q\frac{r^2 - x^2}{8} - \frac{Qx^2}{4}\lg\frac{r}{x}. \tag{176}$$

Diese Gleichung lassen wir aus dem vorher angegebenen Grunde bis zur Mitte hin gelten. Für $x = 0$ nimmt das zweite Glied der rechten Seite die unbestimmte Form $0 \cdot \infty$ an; der richtige Wert ist aber, wie man leicht einsieht, Null, denn ein Logarithmus wächst viel langsamer als der Numerus, zu dem er gehört. Darum wird schon $x \lg x$ zu Null für $x = 0$ und $x^2 \lg x$ umsomehr. Für den Biegungspfeil f erhalten wir demnach aus Gl. (176)

$$f = \frac{Qr^2}{8} = \frac{3(m^2 - 1)}{4\pi m^2} \cdot \frac{Pr^2}{Eh^3} = 0{,}22\frac{Pr^2}{Eh^3}. \tag{177}$$

wenn $m = \frac{10}{3}$ gesetzt wird. Der Vergleich von Gl. (177) mit Gl. (162) lehrt, daß der Biegungspfeil viermal so groß wird, wenn die Last P in der Mitte konzentriert ist, als wenn sie sich gleichmäßig über die ganze Fläche der Platte verteilt.

§ 50. Fortsetzung für den Fall, daß die Platte am Rande frei aufliegt.

Für den Fall einer gleichförmig verteilten Belastung bleiben hier alle Betrachtungen von § 48 bis nach Gl. (156) gültig. Die Integrationskonstante C von Gl. (156) ist auch hier gleich Null zu setzen; dagegen nimmt die Integrationskonstante B in

$$\varphi = -\frac{N}{8}x^3 + Bx \tag{178}$$

einen anderen Wert an als dort. Vorausgesetzt, daß die Platte am Rande nur knapp übersteht, muß dort σ_r zu Null werden und diese Bedingung gestattet uns, B zu ermitteln. Im anderen Falle, wenn die Platte um ein größeres Stück über

den Auflagerkreis hinausreicht, muß noch der äußere Ast der Meridiankurve der elastischen Fläche näher untersucht und zuletzt die Bedingung eingeführt werden, daß am Rande der Platte die Spannungen in radialer Richtung zu Null werden. Daß σ_r hier verschwindet, folgt daraus, daß der ringförmige Schnitt hier die Grenze des Körpers bildet und daß der Voraussetzung zufolge äußere Kräfte an dieser Stelle nicht einwirken.

Die hier angedeutete Rechnung bietet nun zwar an und für sich keine besonderen Schwierigkeiten, vielmehr kann das Gesetz des äußeren Meridianastes leicht aus den Formeln für den inneren Ast entnommen werden, wenn man darin $N = 0$ setzt. Immerhin erfordert aber die Durchführung einige Zeit, da man außer B in Gl. (178) auch noch zwei Integrationskonstanten für den äußeren Ast aus den Grenzbedingungen ermitteln muß. (Zu diesen Grenzbedingungen gehört natürlich auch der stetige Übergang aus dem inneren Aste in den äußeren.) Ich sehe deshalb von dieser umständlicheren Betrachtung ab und nehme an, daß σ_r schon für $x = r$ (oder schon unmittelbar nach $x = r$) verschwinden muß, weil die Platte dort zu Ende ist und keine Auflagerkräfte an der ringförmigen Schnittfläche übertragen werden.

Für σ_r hat man nach Gl. (150)

$$\sigma_r = \frac{mE}{m^2 - 1} z\left(m \frac{d\varphi}{dx} + \frac{\varphi}{x}\right).$$

Der Klammerwert muß also für $x = r$ verschwinden. Nun ist nach Gl. (178)

$$m \frac{d\varphi}{dx} + \frac{\varphi}{x} = -(3m + 1)\frac{Nx^2}{8} + (m + 1)B.$$

Für $x = r$ hat man daher die Bedingungsgleichung

$$B = \frac{3m + 1}{m + 1} \cdot \frac{Nr^2}{8}, \tag{179}$$

womit die Konstante B ermittelt ist. Hiermit geht Gl. (178) über in

$$\varphi = \frac{N}{8}\left(\frac{3m + 1}{m + 1} r^2 x - x^3\right). \tag{180}$$

Für die Dehnungen ε_r und ε_t erhält man

$$\varepsilon_t = \frac{N}{8} z \left(\frac{3m+1}{m+1} r^2 - x^2\right); \quad \varepsilon_r = \frac{N}{8} z \left(\frac{3m+1}{m+1} r^2 - 3x^2\right). \quad (181)$$

Die größte Dehnung tritt in der Mitte auf; man hat dort

$$\varepsilon_r = \varepsilon_t = \frac{N}{8} z \frac{3m+1}{m+1} r^2$$

und daraus folgt für die reduzierte Spannung, wenn man den Wert von N aus Gl. (154) einführt, $z = \frac{h}{2}$ und schließlich noch $m = \frac{10}{3}$ setzt:

$$\sigma_{\text{red}} = \frac{3(m^2-1)(3m+1)}{8m^2(m+1)} \cdot \frac{r^2}{h^2} p = 0{,}87 \frac{r^2}{h^2} p. \quad (182)$$

Im Gegensatze zu der Platte mit eingeklemmtem Rande wird hier das Material in der Mitte am meisten angestrengt; der Bruch wird also von hier aus beginnen. Die Beanspruchung wird hier im Verhältnisse $87:68 = 1{,}28$ mal größer an der ungünstigsten Stelle als im früheren Falle.

Um noch den Biegungspfeil zu berechnen, setze ich wieder

$$\frac{dy}{dx} = -\varphi = \frac{N}{8}\left(x^3 - \frac{3m+1}{m+1} r^2 x\right), \quad (183)$$

woraus durch Integration folgt

$$y = \frac{N}{8}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{3m+1}{m+1} \cdot \frac{r^2 x^2}{2}\right) + C. \quad (184)$$

Für $x = r$ muß y verschwinden; daraus erhält man die Integrationskonstante C

$$C = \frac{N}{8}\left(\frac{3m+1}{m+1} \cdot \frac{r^4}{2} - \frac{r^4}{4}\right).$$

Wenn in Gl. (184) $x = 0$ gesetzt wird, erhält man $y = C$, d. h. die Integrationskonstante C gibt zugleich den Biegungspfeil f an. Setzt man den Wert von N ein und später auch noch $m = \frac{10}{3}$, so wird daher

$$f = \frac{3}{16} \cdot \frac{m^2-1}{m^2 E h^3} \cdot p \cdot \frac{5m+1}{m+1} r^4 = 0{,}70 \frac{p}{E} \cdot \frac{r^4}{h^3}. \quad (185)$$

Der Biegungspfeil wird also hier, wie ein Vergleich mit Gl. (162) lehrt, etwas mehr als viermal so groß, als bei ein-

geklemmtem Rande. Bei Versuchen über das Verhalten kreisförmiger Platten bei gleichförmiger Belastung kann die Wirksamkeit einer Einspannung am Rande am besten dadurch beurteilt werden, daß man den Biegungspfeil mißt und ihn mit den Formeln (162) und (185) vergleicht.

Schließlich soll auch noch eine frei aufliegende Platte betrachtet werden, die eine Einzellast in der Mitte trägt. Dabei will ich mich aber auf die Ermittelung der Gestalt der elastischen Fläche und die Berechnung des Biegungspfeiles beschränken, da im anderen Falle die etwas weitläufige Untersuchung von § 49 wiederholt werden müßte, ohne daß ein besonderer Gewinn dabei herauskäme.

Daß die Platte am Rande eingespannt sei, setzte ich in § 49 erst nach der Ableitung von Gl. (166) voraus, um die Konstante B zu ermitteln. Ich habe also hier auszugehen von der Gl. (166)

$$\varphi = -\frac{Q}{2} x \lg x + Bx,$$

denn C ist auch hier gleich Null zu setzen. Wie im Eingange dieses Paragraphen haben wir zur Bestimmung von B die Bedingung zu benutzen, daß für $x = r$ der Ausdruck

$$m \frac{d\varphi}{dx} + \frac{\varphi}{x}$$

verschwinden muß. Setzt man den hier gültigen Wert von φ ein, so erhält man

$$m \frac{d\varphi}{dx} + \frac{\varphi}{x} = -(m+1)\frac{Q}{2} \lg x + (m+1) B - m \frac{Q}{2}$$

und die Grenzbedingung liefert

$$B = \frac{Q}{2} \lg r + \frac{m}{m+1} \cdot \frac{Q}{2} \cdot$$

Damit wird nun

$$\varphi = \frac{Q}{2} x \lg \frac{r}{x} + \frac{m}{m+1} \cdot \frac{Q}{2} x. \tag{186}$$

Das Negative davon ist gleich $\frac{dy}{dx}$ zu setzen und die Integration liefert

$$y = -\frac{Q}{2}\left\{\frac{x^2}{2}\lg\frac{r}{x} + \frac{x^2}{4} + \frac{m}{m+1}\cdot\frac{x^2}{2}\right\} + C. \qquad (187)$$

Für $x = r$ muß y wieder zu Null werden; daraus folgt für die Integrationskonstante C

$$C = \frac{Q}{2}\left(\frac{r^2}{4} + \frac{m}{m+1}\cdot\frac{r^2}{2}\right).$$

Dies ist zugleich der Wert von y für $x = 0$; also der Biegungspfeil. Nach Einsetzen von Q aus Gl. (164) und mit $m = \frac{10}{3}$ erhält man daher

$$f = \frac{3(m-1)(3m+1)}{4\pi m^2}\cdot\frac{Pr^2}{Eh^3} = 0{,}55\frac{Pr^2}{Eh^3}. \qquad (188)$$

Der Biegungspfeil wird also bei dieser Belastung für die frei aufliegende Platte, wie ein Vergleich mit Gl. (177) lehrt, etwa $2^1/_2$ mal so groß, als bei unwandelbar fest eingespanntem Rande.

Anmerkung. Nachdem durch Gl. (187) die Einsenkung y an jeder Stelle für eine in der Mitte angreifende Last dargestellt ist, kann man nach dem Maxwellschen Satze von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen umgekehrt auch den Biegungspfeil in der Mitte für jede beliebige Lastverteilung, die nicht symmetrisch zu sein braucht, angeben. Man hat dafür

$$f = \int\frac{q\,dF\,y}{Q}$$

zu bilden, wo q die beliebig gegebene Flächendichte der Last an dem Flächelemente dF und die Integration über die ganze Plattenfläche auszudehnen ist. Für y ist der aus Gl. (187) zu entnehmende Ausdruck einzusetzen.

§ 51. Bachsche Näherungstheorie für kreisförmige Platten.

Dieselbe Aufgabe, die in dem vorhergehenden Paragraphen eine genauere Untersuchung erfahren hat, soll jetzt noch einmal auf einfachere Art behandelt werden. Bei vielen Aufgaben über die Festigkeit von Platten wird nämlich eine genauere Untersuchung nach dem Muster der vorhergehenden, falls sie überhaupt durchführbar ist, zu verwickelt, als daß man für den praktischen Gebrauch darauf zurückgreifen könnte. Man ist dann auf eine mehr schätzungsweise Berechnung angewiesen.

Wie man zu diesem Zwecke vorzugehen hat, erkennt man aber am besten, wenn man das Näherungsverfahren zuerst für einen Fall entwickelt, mit dessen Einzelheiten man sich vorher schon durch eine eingehende Betrachtung bekannt gemacht hat.

Wir wollen uns die Platte als frei aufliegend vorstellen. Dies rechtfertigt sich dadurch, daß bei dieser Auflagerung, wie wir uns vorher überzeugten, eine größere Anstrengung des Materials zustande kommt, als bei einer Einspannung am Rande. Da man nun gewöhnlich im Zweifel sein wird, bis zu welchem Grade sich die Einspannung als wirksam erweist, ist es zweckmäßig, bei der Berechnung den ungünstigeren Fall zugrunde zu legen. Man nimmt auch in der Tat bei der Berechnung von Balken, die an den Enden eingespannt sind, sehr häufig keine Rücksicht auf diesen Umstand, weil man unsicher darüber ist, ob die getroffenen Vorkehrungen wirklich ausreichen, um ganz kleine Winkeldrehungen der Stabenden zu verhüten.

Durch die frei aufliegende Platte (Abb. 59) denke man sich einen Meridianschnitt AB gezogen und betrachte das Gleichgewicht der in dem Schnitte übertragenen Spannungen mit den an der linken Hälfte der Platte angreifenden äußeren Kräften. Schubspannungen sind der Symmetrie wegen in dem Meridianschnitte nicht zu erwarten und die Normalspannungen sind die in den vorausgehenden Paragraphen mit σ_t bezeichneten. Alle Normalspannungen für die ganze Schnittfläche lassen sich zu einem Kräftepaare zusammenfassen, gerade so, wie etwa die Spannungen in dem Querschnitte eines auf Biegung beanspruchten Balkens. Nehmen wir ferner an, daß die Platte eine gleichförmig verteilte Belastung zu tragen hat, so läßt sich die davon auf die eine Plattenhälfte entfallende zu einer Resul-

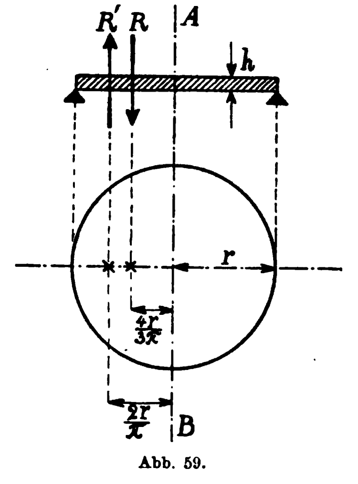


Abb. 59.

tierenden R zusammensetzen, die durch den Schwerpunkt der Halbkreisfläche geht, von der Größe

$$R = \frac{\pi r^2}{2} p,$$

wenn die Buchstaben die frühere Bedeutung behalten. Von äußeren Kräften kommen dann noch die längs des Auflagerkreises übertragenen Auflagerkräfte in Betracht. Der vollständigen Symmetrie wegen müssen diese gleichförmig über den ganzen Umfang verteilt sein. Die an der einen Plattenhälfte angreifenden Auflagerkräfte denken wir uns ebenfalls zu einer Resultierenden R' vereinigt. Diese geht dann der gleichförmigen Verteilung wegen durch den Schwerpunkt des Halbkreisbogens und sie ist ebenso groß, aber entgegengesetzt gerichtet, wie die von der Plattenhälfte aufgenommene Belastung. Alle äußeren Kräfte des einen Plattenstücks sind damit auf ein Kräftepaar zurückgeführt, das mit dem Kräftepaare der Spannungen im Gleichgewichte stehen muß. Das Moment des Kräftepaares der äußeren Kräfte wollen wir, wie früher bei der Untersuchung des Balkens, als das Biegungsmoment M bezeichnen. Es ist gleich dem vorher festgestellten Werte der Belastung der Plattenhälfte multipliziert mit dem Abstande der beiden Schwerpunkte, die als Angriffspunkte der beiden Kräfte des Paares dienen.

Der Schwerpunkt eines Halbkreisbogens hat den Abstand $\frac{2r}{\pi}$ und der Schwerpunkt der Halbkreisfläche den Abstand $\frac{4r}{3\pi}$ von dem Durchmesser. Der Abstand beider Schwerpunkte voneinander ist daher gleich $\frac{2r}{3\pi}$; mit r ist der Radius der Platte bezeichnet. Demnach ist das Biegungsmoment

$$M = \frac{\pi r^2}{2} p \cdot \frac{2r}{3\pi} = \frac{pr^3}{3}, \tag{189}$$

und ebenso groß muß das Moment der Spannungen σ_t oder wie wir sie hier der Kürze halber nennen wollen, der Spannungen σ sein.

Bis dahin ist die Betrachtung durchaus streng und einwandfrei; man kann sie aber in so untadelhafter Weise nicht

zu Ende führen, weil man von vornherein nicht wissen kann, nach welchem Gesetze sich die Spannungen σ mit der Entfernung x von der Plattenmitte ändern. Die früheren Untersuchungen sollen zur Ergänzung dieser Lücke nicht benutzt werden, da die Bachsche Näherungstheorie ganz selbständig vorgeht. Jedenfalls kann man aber eine untere Grenze für die größte Kantenspannung finden, die mindestens erreicht werden muß. Man setze nämlich willkürlich voraus, daß die Spannungen σ unabhängig von x seien. Die Verteilung der Spannungen über den Meridianschnitt gleicht dann vollständig jener, die für den Querschnitt eines auf Biegung beanspruchten Balkens gilt. Daher kann auch zur Ableitung der Kantenspannung aus dem Biegungsmomente unmittelbar die für den Balken mit rechteckigem Querschnitte bekannte Formel

$$\sigma = \frac{6M}{bh^2}$$

benutzt werden. An Stelle von b tritt hier der Durchmesser $2r$ der Platte, während h stehen bleiben kann, da wir mit diesem Buchstaben ohnehin schon die Dicke der Platte bezeichnet hatten. Nach Einsetzen von M aus Gl. (189) folgt daher

$$\sigma = p\frac{r^2}{h^2}. \qquad (190)$$

Dies ist nun freilich nur eine untere Grenze für die in Wirklichkeit zu erwartende größte Spannung σ, denn wenn die Kantenspannungen in verschiedenen Entfernungen von der Mitte verschieden groß sind, müssen sie notwendig an einigen Stellen größer, an anderen kleiner sein als der berechnete Durchschnittswert. Ehe man in die Anwendung von Gl. (190) hinreichendes Vertrauen setzen kann, muß man sich daher auf irgend eine Art ein Urteil darüber verschaffen, ob der Überschuß des größten Wertes über den Durchschnittswert nicht so erheblich ist, daß die Berechnung nach Gl. (190) zu ganz groben Fehlern führt. Es ist ganz gerechtfertigt, wenn man dazu Versuche über die Festigkeit solcher Platten zu Hilfe nimmt. Man kann dann etwa so vorgehen, daß man an Stelle von Gl. (190)

$$\sigma = \eta p \frac{r^2}{h^2}$$

schreibt, wo nun η ein Erfahrungskoeffizient ist, von dem von vornherein bekannt ist, daß er jedenfalls größer als 1 sein muß. Herr v. Bach hat in der Tat die Anwendbarkeit seiner Formel auf dem Wege des Versuches nachgewiesen und es zeigte sich, daß es genügt, η gleich 1 zu setzen, die Abweichung von diesem kleinsten Werte, der überhaupt in Frage kommen kann, also zu vernachlässigen.

Natürlich bleibt ein solcher Versuch immer nur für solche Bedingungen beweiskräftig, die mit den Bedingungen des Versuches ganz oder nahezu übereinstimmen. Unter anderen Verhältnissen, die nicht besonders geprüft sind, könnten die Abweichungen leicht größer werden. Es ist daher angenehm, daß wir hier in der Lage sind, die Bachsche Formel (190) mit der aus der genaueren Theorie abgeleiteten zu vergleichen. In § 50 ist die Spannung σ_t nicht berechnet; wir können dies aber leicht nachträglich tun. Nach den Gl. (150) ist nämlich

$$\sigma_t = \frac{mE}{m^2-1} z \left(m \frac{\varphi}{x} + \frac{d\varphi}{dx} \right)$$

und nach Gl. (180) werden in unserem Falle φ und sein Differentialquotient durch die Ausdrücke

$$\varphi = \frac{N}{8} \left(\frac{3m+1}{m+1} r^2 x - x^3 \right),$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{N}{8} \left(\frac{3m+1}{m+1} r^2 - 3x^2 \right)$$

dargestellt. Setzt man dies ein und macht $x = 0$, um die größte Spannung σ_t in der Mitte zu erhalten, ebenso $z = \frac{h}{2}$, so findet man

$$\sigma_t = \frac{mE}{m^2-1} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{N}{8} (3m+1) r^2.$$

Mit dem Werte von N aus Gl. (154) und schließlich mit $m = \frac{10}{3}$ geht dies über in

$$\sigma_t = \frac{3(3m+1)}{8m} p \frac{r^2}{h^2} = 1{,}24\, p \frac{r^2}{h^2}. \tag{191}$$

Damit ist die Größe der Abweichung des Wertes aus Gl. (190) von der genaueren Formel für die größte Spannung σ_t festgestellt.

Geht man von der Annahme aus, daß die Bruchgefahr von der reduzierten Spannung abhänge, so ist übrigens die Näherungsformel (190), nach der die Beanspruchung des Materials unmittelbar bemessen werden soll, nicht mit Gl. (191) sondern mit Gl. (182)

$$\sigma_{red} = 0{,}87\, p \frac{r^2}{h^2}$$

zu vergleichen und es zeigt sich, daß die Anstrengung des Materials sogar noch kleiner ist, als sie von der Näherungsformel angegeben wird.

Freilich ist nach der Mohrschen Theorie der Materialbeanspruchung, die mit den Erfahrungstatsachen besser übereinstimmt, als die Bemessung nach den reduzierten Spannungen, die Bruchgefahr hier, wo es sich um ein Zusammenwirken von Spannungen des gleichen Vorzeichens handelt, unmittelbar nach dem Werte von σ_t zu beurteilen. Andererseits ist aber auch von der Berücksichtigung einer Einspannung am Rande ganz abgesehen, während sich bei den gewöhnlichen Befestigungsarten wenigstens eine teilweise Einspannung geltend machen wird. In der Regel wird es daher gar keinen Bedenken unterliegen, nach Gl. (190) zu rechnen.

Falls die frei aufliegende Platte eine Einzellast P in der Mitte trägt, hat man für das Biegungsmoment

$$M = \frac{P}{2} \cdot \frac{2r}{\pi} = \frac{Pr}{\pi}$$

und die Spannung σ wird nach dem Näherungsverfahren

$$\sigma = \frac{3P}{\pi h^2}. \tag{192}$$

Wir sahen indessen früher, daß die größte Anstrengung des Materials hier wesentlich davon abhängt, wie die Last P in der Mitte sich innerhalb eines kleinen Bereiches verteilt. Ein unmittelbarer Vergleich mit früheren Rechnungen ist daher hier nicht wohl durchführbar und leider sind auch ausreichende

Versuche, die zur Prüfung der Formel (192) dienen könnten, nicht bekannt. Man wird daher jedenfalls nur mit Vorsicht davon Gebrauch machen können.

§ 52. Näherungstheorie für die gleichförmig belastete elliptische Platte.

Hier wird die Aufgabe schwieriger, weil man nicht von vornherein anzugeben vermag, wie sich der Auflagerdruck längs des Umfangs verteilt. Um einen Anhaltspunkt dafür zu gewinnen, denke man sich die elliptische Öffnung durch zwei sich rechtwinklig kreuzende Stäbe AB und CD (Abb. 60) von gleichem Querschnitte überdeckt. In der Mitte sollen diese Stäbe miteinander verbunden sein, oder man kann sich anstatt dessen auch das Kreuz $ABCD$ aus der Platte selbst ausgeschnitten denken, wie es in der Zeichnung angedeutet ist. Nach den Lehren des dritten Abschnitts kann man leicht berechnen, wie groß die Auflagerkräfte sind, die an den vier Stützpunkten A, B, C, D übertragen werden, wenn die Stäbe irgendwie gegebene, also z. B. gleichförmig verteilte Lasten tragen. (Man vergleiche z. B. Aufgabe 22.) Auch ohne diese Rechnung durchzuführen, erkennt man bereits, daß der Auflagerdruck bei C und D größer sein muß als bei A und B, weil der Stab AB der größeren Spannweite wegen viel biegsamer ist, als der kürzere Stab CD. Wenn eine Einzellast im Kreuzungspunkte der Stäbe aufgebracht wäre, müßten sich z. B. die Anteile, die von beiden Stäben aufgenommen würden, wie aus der Lösung von Aufgabe 22 hervorgeht, umgekehrt wie die dritten Potenzen der Stablängen oder der Halbachsen a und b verhalten. Nicht so groß ist der Unterschied zwischen den

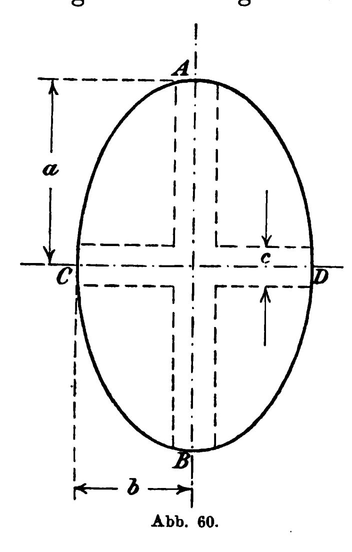


Abb. 60.

Auflagerkräften bei der gleichförmig verteilten Belastung, die von der Platte in Wirklichkeit getragen wird.

Natürlich kann diese Betrachtung nicht dazu dienen, das Verhältnis der Auflagerkräfte, die bei der elliptischen Platte an den Enden der Durchmesser AB und CD übertragen werden, genauer zu berechnen. Bei der Platte wird der Streifen AB nicht nur von dem mittleren Querstreifen CD gestützt, sondern auch noch von einer Reihe anderer, die man sich zu beiden Seiten von CD und parallel zu CD hinzugefügt denken muß. Andererseits sind auch diese Querstreifen CD nicht von dem Längsstreifen AB allein belastet, sondern auch von anderen, die neben diesem parallel zu ihm gezogen sind. Die genaue Lösung kann daher nur durch eine verwickelte Betrachtung und zwar durch Integration einer partiellen Differentialgleichung gefunden werden, wovon aber hier abgesehen werden soll. Es genügt vielmehr, wenn man sich nur klar darüber geworden ist, daß der Auflagerdruck der gleichförmig belasteten elliptischen Platte jedenfalls am kleinsten an den Enden der großen Achse ausfallen muß und daß er von da aus nach den Endpunkten der kleinen Achse hin zunehmen wird.

Wir wollen jetzt annehmen, daß die Ellipse sehr langgezogen, die Achse AB also sehr viel größer sei, als die kleine Achse CD. Dann kann in dem Streifen CD und den sich beiderseits an ihn anschließenden mittleren Teilen der Platte die Steifigkeit oder der Biegungswiderstand der Platte in der Längsrichtung AB gegen den in der Querrichtung CD vernachlässigt werden. Die Platte wird sich, wenigstens in diesen mittleren Teilen, nahezu so verhalten, als wenn sie durch eine Reihe von Schnitten parallel zur kleinen Achse in eine Schicht nebeneinander liegender Balken CD usf. getrennt wäre. Für diesen Fall läßt sich daher die Beanspruchung in der Platte ohne weiteres auf die eines einzelnen Balkens CD zurückführen, der ohne Zusammenhang mit den übrigen Teilen der Platte steht und die auf ihn treffende Last selbständig aufzunehmen hat. In der Tat macht sich hier nur insofern ein Unterschied geltend, als der Balken CD an jenen Stellen seines

Querschnitts, die gezogen sind, gleichzeitig eine Verkürzung der Quere nach, an den gedrückten dagegen eine Querdehnung erfahren würde, die in der Platte durch den Zusammenhang mit den benachbarten Streifen verhindert oder wenigstens erschwert wird. Dies kann aber nur zur Folge haben, daß die Platte widerstandsfähiger ist als der einzelne Balken, und da es uns jetzt nur darauf ankommt, die Beanspruchung unter den ungünstigsten Voraussetzungen zu ermitteln, wollen und dürfen wir von diesem Unterschiede absehen.

Bezeichnet man die willkürlich gewählte Breite des Balkens CD mit c, so trifft auf ihn die Oberfläche $2bc$ der Platte und daher die Last $2bcp$. Das Biegungsmoment in der Mitte ist

$$M = 2bcp \cdot \frac{2b}{8} = cp\frac{b^2}{2}.$$

Die Biegungsformel für den Balken liefert daher die Kantenspannung

$$\sigma = \frac{6M}{ch^2} = 3p\frac{b^2}{h^2}. \tag{193}$$

Die Streifenbreite c ist aus der Formel wieder fortgefallen, wie man von vornherein erwarten mußte. — Zugleich ist auch klar, daß man hiermit in der Tat die größte in der Platte zu erwartende Spannung gefunden hat, denn ein Streifen, der in der Richtung AB herausgeschnitten wäre, würde zwar in der Mitte denselben Biegungspfeil aufweisen, wie CD; wegen der größeren Spannweite wäre er aber viel weniger gekrümmt als CD. Von dem Krümmungshalbmesser hängen aber die spezifischen Längenänderungen der äußersten Fasern ab und daher sind auch die Spannungen in CD am größten. Diese sind also jedenfalls am größten im mittelsten Querschnitte des Balkens CD oder mit anderen Worten in dem längs der großen Achse AB gezogenen Querschnitte der Platte. Längs der Linie AB muß man daher auch den Bruch der Platte bei entsprechender Steigerung der Belastung erwarten. Dies wurde auch durch Versuche v. Bachs bestätigt.

Wenn die Ellipse weniger langgestreckt ist, als bisher angenommen wurde, kommt eine Entlastung der Balken CD

durch die Längssteifigkeit der Platte und hiermit eine Verminderung der Spannung σ zu Stande. Im allgemeinen gibt daher Gl. (193) die Spannung und damit die Bruchgefahr zu groß an. Geht die Ellipse in einen Kreis über, so können wir nach den vorigen Paragraphen

$$\sigma = p\frac{r^2}{h^2} = p\frac{b^2}{h^2} \tag{194}$$

setzen, und je mehr sich die Ellipse dem einen oder dem anderen Grenzfalle nähert, um so mehr wird sich auch die in Wirklichkeit auftretende größte Spannung dem einen oder anderen der durch die Gleichungen (193) und (194) gegebenen Werte nähern.

Im allgemeinen Falle wird man daher setzen können

$$\sigma = \alpha \cdot p\frac{b^2}{h^2}, \tag{195}$$

wo nun α ein Faktor ist, von dem man zunächst nur weiß, daß er gleich 1 wird für

$$\frac{b}{a} = 1$$

und gleich 3 für

$$\frac{b}{a} = 0.$$

Man denke sich für jedes andere Achsenverhältnis $\frac{b}{a}$ das zugehörige α gefunden und α als Funktion von $\frac{b}{a}$ durch eine Kurve dargestellt. So lange man nichts näheres über die wirkliche Gestalt dieser Kurve weiß, von der wir nur die beiden Endpunkte kennen, liegt es für den Zweck einer ersten ungefähren Abschätzung am nächsten, sie zwischen diesen Punkten als geradlinig vorauszusetzen. Die lineare Funktion von $\frac{b}{a}$, die den beiden Bedingungen an den Grenzen genügt, lautet

$$\alpha = 3 - 2\frac{b}{a}$$

und wenn man dies in Gl. (195) einsetzt, erhält man als Näherungsformel für die gleichförmig belastete elliptische Platte

$$\sigma = \frac{3a - 2b}{a} \cdot p \frac{b^2}{h^2}. \tag{196}$$

Mehr als eine ungefähre Schätzung bietet diese Formel freilich nicht; gewöhnlich verlangt man aber auch nur eine Abschätzung, wenn die Festigkeit elliptischer Platten in Frage kommt und dafür wird die Formel, wie aus der Art ihrer Ableitung hervorgeht, immerhin brauchbar sein. Für die beiden Grenzfälle ist sie ohnehin schon verbürgt.

Anmerkung. Einige Versuche mit gußeisernen elliptischen Platten, die bis zum Bruche belastet wurden, sind von v. Bach ausgeführt worden. Berechnet man aus diesen die Bruchspannung nach Gl. (196), so erhält man Werte, die bis auf 5200 atm hinaufreichen, während die an Stäben aus demselben Gußeisen durch einen Biegungsversuch ermittelte und nach der gewöhnlichen Biegungsformel berechnete Bruchspannung nur 2760 atm betrug. Bei diesem Vergleiche ist indessen zu berücksichtigen, daß bei der vorhergehenden Ableitung die Einspannung des Randes ganz vernachlässigt wurde, während bei jenen Versuchen durch die Art der Auflagerung und Abdichtung bis zu einem gewissen Grade eine Einspannung bewirkt wurde.

§ 53. Näherungstheorie für quadratische und rechteckige Platten.

Hier ist man für den Zweck der Abschätzung wieder in etwas günstigerer Lage. Zunächst betrachte ich eine quadratische Platte von der Seite $2a$; die Diagonale $= 2a\sqrt{2}$ sei mit d bezeichnet. Die Belastung ist $= 4pa^2$ und auf jede Seitenfläche kommt daher der Auflagerdruck pa^2. Dieser ist jedenfalls so verteilt, daß er von der Seitenmitte nach den Ecken hin abnimmt. Wir untersuchen zwei Schnittflächen, eine parallel zu zwei Seiten und die andere in der Richtung der Diagonale. Für den ersten Schnitt haben wir zunächst den Auflagerdruck auf der dem Schnitte gegenüberliegenden Quadratseite ins Auge zu fassen. Er hat die Größe pa^2 und das Moment pa^3. Dann kommen die Auflagerkräfte an den beiden Halbseiten, die zusammen auch gleich pa^2 sind. Die Resultierende steht sicher um weniger als $\frac{a}{2}$ von der Schnitt-

fläche ab; bezeichnen wir diesen unbekannten Abstand mit x, so ist deren Moment $= pa^2x$ und das Biegungsmoment

$$M = pa^3 + pa^2x - pa^3 = pa^2x$$

und die Biegungsspannung σ nach der gewöhnlichen Formel

$$\sigma = \frac{6M}{2ah^2} = 3p\frac{ax}{h^2}.$$

Da x jedenfalls kleiner als $\frac{a}{2}$ ist, wird

$$\sigma < \frac{3}{2} \cdot \frac{a^2}{h^2} p.$$

Bei dem Schnitte in der Richtung der Diagonale kommen zwei Auflagerkräfte vor, die beide den Abstand $\frac{d}{4}$ von der Schnittfläche haben. Der Angriffspunkt der Belastung fällt mit dem Schwerpunkte des Dreiecks zusammen, das die eine Hälfte des Quadrats bildet; er hat daher den Abstand $\frac{d}{6}$ von der Schnittfläche. Wir können das Biegungsmoment M daher in diesem Falle genau angeben; es ist

$$M = 2pa^2 \cdot \frac{d}{12} = \frac{pa^2d}{6}$$

und die Biegungsspannung σ wird

$$\sigma = \frac{6M}{dh^2} = p\frac{a^2}{h^2}, \qquad (197)$$

also in diesem Falle ebenso groß als bei einer kreisförmigen Platte von dem Halbmesser a. Der zuletzt gefundene Wert ist kleiner als die obere Grenze für die Spannung in dem Schnitte parallel zu zwei Seiten. So lange man nichts genaueres über den wirklichen Wert von x anzugeben vermag, befindet man sich daher im Zweifel, ob Gl. (197) den größten Wert der Beanspruchung angibt oder die Beanspruchung für den anderen Schnitt größer ist. Hier tritt wieder ein Bachscher Versuch in die Lücke, bei dem quadratische Platten längs der Diagonale aufrissen. Man kann daher Gl. (197) für die Berechnung anwenden.

Auch für rechteckige Platten, die von der quadratischen Form nicht viel abweichen, wollen wir einen in der Richtung der Diagonale geführten Schnitt als den gefährlichen Bruchquerschnitt betrachten. Die Rechteckseiten bezeichnen wir mit $2a$ und $2b$, die Diagonale mit d und die zu d gehörige Höhe des Dreiecks, das die eine Hälfte des Rechtecks bildet, mit c. Wie sich nun auch der Auflagerdruck über die Rechteckseiten verteilen mag, jedenfalls kommt auf die beiden Katheten des Dreiecks der Auflagerdruck $2pab$ und die Resultierende hat den Abstand $\frac{c}{2}$ von der Diagonale. Der Abstand des Dreiecksschwerpunkts ist $\frac{c}{3}$ und daher das Biegungsmoment

$$M = \frac{pabc}{3}.$$

Die Biegungsspannung wird daher

$$\sigma = \frac{6M}{dh^2} = 2p\frac{abc}{dh^2}.$$

Da $cd = 4ab$, und $d^2 = 4a^2 + 4b^2$ ist, geht dies über in

$$\sigma = 2p\frac{a^2}{a^2+b^2}\cdot\frac{b^2}{h^2} = p\frac{c^2}{2h^2}. \tag{198}$$

Eine rechteckige Platte, deren Langseite weit größer ist, als die Schmalseite, verhält sich so wie eine elliptische Platte von demselben Achsenverhältnisse. Wir können daher Gleichung (193)

$$\sigma = 3p\frac{b^2}{h^2}$$

auch für die Berechnung der sehr langgestreckten rechteckigen Platte benutzen.

Aufgaben.

36. Aufgabe. Eine frei aufliegende kreisförmige, gußeiserne Platte von beliebigem Durchmesser hat 2 cm Stärke. Wie groß darf eine auf eine kleine Fläche in der Mitte konzentrierte Belastung sein, wenn man eine nach dem Näherungsverfahren in § 51 be-

rechnete Biegungsspannung des Gußeisens von 200 atm als zulässig ansieht?

Lösung. Man braucht nur die Zahlenwerte in Gl. (192) einzusetzen. Man findet

$$P = \frac{\pi h^2 \sigma}{3} = \frac{\pi}{3} \cdot 2^2 \cdot 200 = 837 \text{ kg}.$$

Auf den ersten Blick erscheint es vielleicht auffällig, daß der Durchmesser der Platte gleichgültig ist, denn bei einem Stabe spielt die Größe der Spannweite eine Hauptrolle. Bei der Platte ist es aber deshalb anders, weil in demselben Verhältnisse, in dem bei größerer Öffnung die Hebelarme wachsen, auch die Breite des Querschnitts zunimmt, über den sich die Biegungsspannungen verteilen.

Bei gleichförmiger Verteilung über die ganze Platte dürfte die Last dreimal so groß sein, wie aus dem Vergleiche von Gl. (192) mit Gl. (190) hervorgeht.

Anmerkung. Da die Größe des Auflagerkreises gleichgültig ist, kann es auch nichts ausmachen, wenn sich der Auflagerdruck auf mehrere konzentrische Auflagerkreise verteilt. Wenn die Platte auf einen nachgiebigen Boden gelegt ist, bleibt daher die zulässige Belastung P ebenso groß als vorher. Auch die Tragfähigkeit der Eisdecke eines Teiches oder Flusses kann nach derselben Formel berechnet werden, falls man die zulässige Spannung σ des Eismaterials kennt.

37. *Aufgabe. Eine Platte von großer Ausdehnung trägt (wie z. B. die Feuerbüchsenplatte eines Lokomotivkessels) eine gleichförmig verteilte Belastung p und ist in gleich weit voneinander entfernten Reihen von Stützpunkten aufgelagert. Man soll die Biegungsbeanspruchung der Platte abschätzen!*

Lösung. In Abb. 61 ist ein Teil der Platte gezeichnet; die Stützpunkte sind durch kleine Kreise hervorgehoben. Auf eine Stütze trifft die Belastung

$$p a^2$$

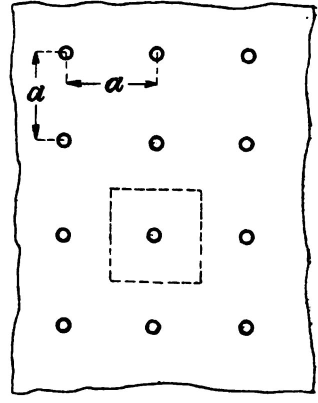


Abb. 61.

und ebenso groß ist daher auch der Auflagerdruck auf jede Stütze. Man kann nun auch umgekehrt diesen Stützendruck als die Belastung des zugehörigen Platten-

stücks und die gleichförmig verteilten Lasten als die dadurch hervorgerufenen Auflagerkräfte ansehen. Dann gleicht der Fall innerhalb des Bezirks, der auf eine einzelne Stütze trifft, dem in der vorhergehenden Aufgabe behandelten. Mit Rücksicht auf die Ausführungen in der Anmerkung kann daher die Biegungsbeanspruchung der Platte nach Gl. (192) zu

$$\sigma = \frac{3pa^2}{\pi h^2}$$

eingeschätzt werden. — Auf besondere Genauigkeit macht natürlich dieses Verfahren keinen Anspruch.

Achter Abschnitt.

Die Festigkeit von Gefäßen unter innerem oder äußerem Überdrucke.

§ 54. Kugelkessel und zylindrische Kessel unter innerem Überdrucke.

Die Wandstärke h wird hier als klein gegenüber dem Durchmesser betrachtet, wie es bei den gewöhnlichen genieteten Kesseln der Fall zu sein pflegt. Der Kessel kann dann, wenn er zylindrisch ist, Verbiegungen keinen erheblichen Widerstand entgegensetzen. Dazu ist aber auch kein Anlaß gegeben, wenn der Querschnitt kreisförmig ist und so wird und muß er immer ausgeführt werden.

Ich betrachte zunächst den kugelförmigen Kessel. Eine Durchmesserebene zerlegt ihn in zwei Halbkugeln; der innere Halbmesser sei mit r bezeichnet. Als äußere Kräfte treten an der Halbkugel die Druckkräfte der eingeschlossenen Flüssigkeit auf die Kesselwand auf. Diese setze ich zu einer Resultierenden zusammen. Schon bei der Lösung von Aufg. 30 wurde darauf hingewiesen, daß man die Resultierende von hydrostatischen Druckkräften, die gleichmäßig über einen Teil einer geschlossenen Fläche verteilt sind, durch die Resultierende für den Rest dieser geschlossenen Fläche ersetzen kann. Der Rest ist hier die kreisförmige Fläche des Schnittes durch den Innenraum des Kessels. Wenn der Flüssigkeitsdruck, in atm ausgedrückt, mit p bezeichnet wird, bildet demnach die Resultierende der äußeren Kräfte eine Kraft, die

durch den Mittelpunkt geht, senkrecht zur Schnittebene steht und die Größe

$$\pi r^2 p$$

hat. Dabei ist vorausgesetzt, daß der Druck in der Tat überall gleich groß ist, daß also die Druckunterschiede, die durch das Gewicht der Flüssigkeit in verschiedenen Höhen bedingt sind, vernachlässigt werden können. Bei den praktisch vorkommenden Fällen ist dies fast immer zulässig.

Mit dieser äußeren Kraft müssen die in der Schnittfläche übertragenen Wandspannungen im Gleichgewichte stehen. Der Symmetrie wegen sind diese Wandspannungen Normalspannungen σ und längs des Umfanges sind sie gleichmäßig verteilt. Aber auch in der Richtung des Radius müssen sich die Spannungen σ nahezu gleichförmig über die Blechdicke verteilen. Um dies zu erkennen, bedenke man, daß sich der Kessel unter dem Einflusse des inneren Überdruckes etwas ausdehnt; der Radius wächst also etwa von r auf $r + \Delta r$. Durch diese elastische Dehnung werden erst die Spannungen σ hervorgerufen. Nun kann sich aber der äußere Kesselradius nicht merklich weniger dehnen, als der innere, denn der etwaige Unterschied würde gleich der elastischen Verkürzung der Wandstärke h sein und diese ist sicher sehr gering, da schon h selbst klein war. Freilich lehrt diese Überlegung zugleich, daß bei Wandstärken, die nicht klein im Vergleiche zum Radius r sind, eine gleichförmige Spannungsverteilung über die ganze Wanddicke nicht zu erwarten ist und daß daher die hier abzuleitenden Formeln immer nur auf dünnwandige Gefäße angewendet werden dürfen.

Für diese aber gestaltet sich die Gleichgewichtsbedingung sehr einfach. Der Schnitt durch die Wand hat den Inhalt $2\pi r h$, wenn man auf den kleinen Unterschied zwischen dem mittleren Radius und dem Innenradius keine Rücksicht nimmt. Daraus folgt

$$2\pi r h \sigma = \pi r^2 p \quad \text{oder} \quad \sigma = \frac{pr}{2h}. \tag{199}$$

Durch einen gegebenen Punkt einer Kugelfläche kann man

sehr viele Durchmesserebenen legen und jeder dieser Schnittrichtungen entspricht dieselbe Normalspannung σ. Nach der Mohrschen Theorie der Bruchgefahr gibt der Wert von σ unmittelbar die Anstrengung des Materials an. Nach der gewöhnlichen Annahme wird diese dagegen durch die reduzierte Spannung gemessen, die sich zu

$$\sigma_{\text{red}} = \frac{m-1}{m}\sigma = \frac{m-1}{m} \cdot \frac{pr}{2h} = 0{,}35\,\frac{pr}{h} \left(\text{für } m = \frac{10}{3}\right) \qquad (200)$$

berechnet. — Wo Nietungen vorkommen, muß natürlich bei der Berechnung des Kessels auf die dadurch veranlaßte Schwächung Rücksicht genommen werden; ebenso auf die etwa in Aussicht zu nehmende Verminderung der Wandstärke durch Rosten usw. Aus diesen Gründen liefern die für die Bemessung der Kesselstärke in der Praxis gebräuchlichen Formeln größere Werte, als sie aus Gl. (200) hervorgehen würden.

Von dem zylindrischen Kessel setze ich voraus, daß er nicht zu kurz im Vergleiche zum Durchmesser sei. Die an die Kesselböden stoßenden Teile des Mantels sind nämlich mehr oder weniger gegen eine Ausdehnung gestützt und sie nehmen daher geringere Wandspannungen auf als die in der Mitte gelegenen Teile. Dieser Einfluß kann sich aber nur auf eine geringe Strecke hin bemerklich machen, da sich das dünne Blech leicht um soviel abbiegt, als dem Unterschiede zwischen den Dehnungen Δr in der Mitte und am Ende entspricht. Ich betrachte jetzt nur einen aus der Mitte herausgegriffenen Streifen von der Länge l in der Richtung der Zylinderachse. Diesen zerlege ich noch durch einen Längsschnitt in zwei Halbzylinder.

An einem dieser Halbzylinder greifen zunächst Kräfte an, die parallel zur Achse gehen, nämlich in den beiden Querschnitten. Diese stehen unter sich im Gleichgewichte und es ist vorerst nicht nötig, auf sie zu achten. Außerdem müssen die in dem Längsschnitte übertragenen Wandspannungen, die sich auf zwei rechteckige Streifen vom Flächeninhalte hl verteilen, im Gleichgewichte mit dem Flüssigkeitsdrucke auf die

Innenwand stehen. Dieselbe Überlegung wie beim Kugelkessel liefert die Gleichgewichtsbedingung

$$2hl\sigma_t = 2rlp \quad \text{oder} \quad \sigma_t = \frac{pr}{h}. \tag{201}$$

Die Wandspannung σ_t in der Richtung der Tangente an den Kreisumfang ist daher beim zylindrischen Kessel doppelt so groß als beim Kugelkessel von demselben Durchmesser.

Für die Spannungen σ_a in der Richtung der Zylinderachse, die in einem Querschnitte übertragen werden, gilt dagegen dieselbe Gleichgewichtsbedingung (199) wie für den Kugelkessel. Für die reduzierte Spannung hat man daher

$$\sigma_{\text{red}} = \sigma_t - \frac{1}{m}\sigma_a = \frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{pr}{h} = 0{,}85\,\frac{pr}{h}\left(\text{für } m = \frac{10}{3}\right). \tag{202}$$

Wenn die Kesselböden Halbkugeln bilden, ist ihre Berechnung schon durch jene des Kugelkessels erledigt. In anderen Fällen wird man sie als Kugelhauben ansehen können und man berechnet dann die Wandspannung in ihnen so, als wenn sie Bestandteile eines ganzen Kugelkessels von dem betreffenden Halbmesser wären. Unter Umständen käme auch, wenn die Böden etwa durch ebene gußeiserne Platten gebildet sein sollten, die Berechnung nach den Lehren des vorigen Abschnitts in Betracht.

Anmerkung. Hierzu muß jedoch bemerkt werden, daß an den Übergangsstellen des zylindrischen Kesselteils in die Kesselböden, die etwa als Kugelhauben ausgebildet sind, unter dem Einflusse der Belastung nicht nur Dehnungen, die sich gleichmäßig über die ganze Blechdicke erstrecken, sondern außerdem auch Verbiegungen auftreten, die eine erheblich höhere Materialbeanspruchung herbeiführen können. Die Übergangsstelle bildet daher, namentlich wenn der unendlich große Krümmungshalbmesser des geradlinigen Teiles des Kessellängsschnittes plötzlich in einen sehr kleinen Krümmungshalbmesser bei der Umbördelung des Kesselbodens übergeht, den schwächsten Punkt des Kessels. Durch einen allmählichen Übergang aus dem einen Krümmungshalbmesser in den anderen kann man die zusätzliche Beanspruchung durch die Verbiegung vermeiden. Näheres hierüber findet man in einer im Zentralblatte der Bauverwaltung 1903, S. 146 von mir veröffentlichten Abhandlung.

§ 55. Röhren von ovalem Querschnitte und Röhren von kreisförmigem Querschnitte unter äußerem Überdrucke.

Eine Röhre von ovalem Querschnitte kann genau so berechnet werden, wie es im 5. Abschnitte für einen Ring auseinandergesetzt wurde. Der durch Abb. 48, S. 214 dargestellte Fall entspricht fast vollständig dem hier vorliegenden; man muß sich nur die Lasten gleichförmig über den ganzen Umfang verteilt denken. Die Durchführung der Rechnungen bietet auch keine besonderen Schwierigkeiten. Es wäre daher nicht nötig, hier noch näher darauf einzugehen — um so weniger, als Röhren von ovalem Querschnitte, wegen des geringen Widerstandes, den sie einer Verbiegung entgegensetzen, zur Herstellung von Gefäßen, die einem größeren Flüssigkeitsdrucke ausgesetzt sind, nur ganz selten verwendet werden — wenn nicht eine Frage von ganz eigener Art dazu führte. Man denke sich nämlich ein ursprünglich genau kreisrundes Rohr durch einen zufälligen Umstand in der einen Richtung etwas elastisch zusammengedrückt, so daß der Querschnitt eine längliche Gestalt annimmt. Wenn die Veranlassung zur Verbiegung wegfällt, geht das Rohr ohne Zweifel wieder in seine ursprüngliche Gestalt zurück, wenn es einem inneren Überdrucke ausgesetzt ist. Man kann aber im Zweifel sein, ob dies auch zutrifft, wenn das Rohr unter einem äußeren Überdrucke steht. Denn ohne jede Rechnung sieht man schon ein, daß ein äußerer Überdruck die vorher bewirkte Abplattung aufrecht zu halten und noch zu vergrößern sucht. Es fragt sich also, ob diese Wirkung des äußeren Überdrucks oder ob die elastischen Kräfte, die dem Rohre die ursprüngliche Gestalt zurückzugeben suchen, die Oberhand behalten. Diese praktisch recht wichtige Frage (man denke nur an die Flammröhren der Dampfkessel) erfordert zu ihrer Beantwortung eine eingehende Rechnung.

In Abb. 62 ist eine Hälfte des Rohrquerschnitts gezeichnet, von dem ich annehme, daß er nur wenig von der gleichfalls gestrichelt eingetragenen ursprünglichen Kreisform abweiche.

Ich nehme ferner an, daß der Rohrumriß nach der Formänderung zwei zueinander senkrechte Symmetrieachsen besitze, so daß es genügt, die Betrachtung auf den einen Quadranten AB zu beschränken. Über die besondere Gestalt des Rohrumrisses wird dagegen im übrigen keine nähere Annahme gemacht; vielmehr wird sich jene aus der weiteren Untersuchung von selbst ergeben. Ich betrachte einen Streifen von der Länge 1 in der Richtung der Rohrachse, um die Mitschleppung eines konstanten Faktors in allen Gliedern der Gleichungen, der sich nachher doch wieder weghebt, von vornherein zu vermeiden.

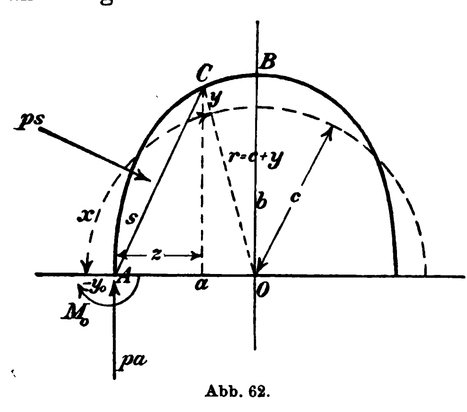


Abb. 62.

Die an der Schnittstelle A übertragenen Spannungen lassen sich genau so wie bei der bereits in § 41 durchgeführten Berechnung eines (nur in etwas anderer Weise belasteten) Ringes durch eine zentrisch angreifende Druckkraft pa und ein Biegungsmoment M_0 ersetzen, das vorläufig unbekannt ist. Auch das Biegungsmoment M an der Stelle C erhält man in der schon von früher bekannten Weise zu

$$M = M_0 + paz - p\frac{s^2}{2}.$$

Hierbei ist der Flüssigkeitsdruck auf den Bogenumfang AC durch den auf die zugehörige Sehne s ersetzt; p gibt den äußeren Überdruck auf die Flächeneinheit an. Aus dem Dreiecke ACO folgt

$$r^2 = s^2 + a^2 - 2az, \quad \text{also} \quad \frac{s^2}{2} - az = \frac{r^2 - a^2}{2}.$$

Setzt man dies ein, so geht der Wert von M über in

$$M = M_0 - p\frac{r^2 - a^2}{2}.$$

Nun kann $r = c + y$ und $a = c + y_0$ gesetzt werden, wobei

zu beachten ist, daß alle y kleine Größen sind gegenüber dem Kreishalbmesser c und daß ferner y positiv zählen soll, wenn es über den Kreis hinaus reicht (so daß also die Strecke y_0 in der Zeichnung einen negativen Wert bedeutet). Die vorige Gleichung geht damit über in

$$M = M_0 - p\frac{2cy + y^2 - 2cy_0 - y_0^2}{2} = M_0 - pc(y - y_0), \quad (203)$$

wenn y gegenüber c vernachlässigt wird.

Für y besteht nach Gl. (114, S. 193) die Beziehung

$$E\Theta\left(\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{y}{c^2}\right) = \pm M.$$

Das früher unbestimmt gelassene Vorzeichen von M richtet sich nach den Festsetzungen, die über die Vorzeichen der Momente M und der Strecken y getroffen sind. Man erkennt aus Abb. 62, daß y mit wachsendem x innerhalb des ganzen Quadranten fortwährend zunimmt, daß also $\frac{dy}{dx}$ überall positiv ist; nur an den Enden des Quadranten bei A und bei B hat $\frac{dy}{dx}$ den Wert Null, weil die deformierte Kurve an diesen Stellen eine zur Kreistangente parallele Tangente hat. Hiernach nimmt $\frac{dy}{dx}$ von A aus mit wachsendem x zunächst zu und später wieder ab. So lange x nicht zu groß wird, ist daher $\frac{d^2y}{dx^2}$ jedenfalls positiv. An diesen Stellen ist aber auch M positiv, da ein rechtsdrehendes Moment als positiv angesehen wurde. Wir haben daher in Gl. (114) in diesem Falle das positive Vorzeichen zu wählen. Setzen wir außerdem den vorher festgestellten Wert von M ein, so erhalten wir

$$E\Theta\left(\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{y}{c^2}\right) = M_0 - pcy + pcy_0,$$

wofür auch

$$E\Theta\frac{d^2y}{dx^2} = M_0 + pcy_0 - \left(pc + \frac{E\Theta}{c^2}\right)y \quad (204)$$

gesetzt werden kann.

Diese Differentialgleichung spricht das Gesetz aus, nach dem sich eine Formänderung des ursprünglich kreisförmigen

Rohrquerschnittes vollzogen haben muß, wenn die neue Form unter der Einwirkung der vorhandenen Lasten eine Gleichgewichtsfigur bilden soll.

Die allgemeine Lösung von Gl. (204) lautet

$$y = \frac{M_0 + pcy_0}{pc + \frac{E\Theta}{c^2}} + A \sin \alpha x + B \cos \alpha x, \tag{205}$$

in der A und B die beiden willkürlichen Integrationskonstanten sind, während α eine Konstante ist, die so ermittelt werden muß, daß die Lösung richtig ist. Durch Einsetzen in die Differentialgleichung findet man, daß diese durch den angegebenen Ausdruck identisch befriedigt wird, sofern man der Konstanten α den Wert

$$\alpha = \sqrt{\frac{pc}{E\Theta} + \frac{1}{c^2}} \tag{206}$$

beilegt. Die Integrationskonstanten sind aus den Grenzbedingungen zu bestimmen. Am Anfange des Quadranten, also für $x = 0$, muß $\frac{dy}{dx} = 0$ und $y = y_0$ werden. Die erste Bedingung liefert $A = 0$ und aus der zweiten folgt

$$B = \frac{\frac{E\Theta}{c^2} y_0 - M_0}{pc + \frac{E\Theta}{c^2}},$$

womit Gl. (205) übergeht in

$$y = \frac{M_0 + pcy_0 + \left(\frac{E\Theta}{c^2} y_0 - M_0\right) \cos \alpha x}{pc + \frac{E\Theta}{c^2}}. \tag{207}$$

Außerdem muß auch noch am anderen Ende des Quadranten, also für $x = \frac{\pi c}{2}$ der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ zu Null werden. Diese Bedingung liefert

$$\sin \frac{\pi \alpha c}{2} = 0 \quad \text{oder} \quad \alpha c = 2. \tag{208}$$

Der Wert von α hängt nämlich, wie aus Gl. (206) hervorgeht, vom äußeren Flüssigkeitsdrucke p ab. Wenn dieser allmählich steigt, nimmt auch α zu. Anfänglich ist der Druck

nicht ausreichend, um die verbogene Form des Rohrquerschnittes aufrecht zu erhalten. Wir sehen jetzt aus Gl. (208), wie groß α und daher auch p geworden sein muß, damit die verbogene Form eine Gleichgewichtsfigur bilden kann. Die Fälle $\alpha c = 4$ u.s.f., bei denen der Sinus ebenfalls verschwinden würde, kommen daher nicht in Betracht. Nach Einsetzen von α aus Gl. (206) und Auflösen nach p findet man aus Gl. (208) den kritischen Überdruck p_k

$$p_k = \frac{3E\Theta}{c^3}. \tag{209}$$

Ist p kleiner als p_k, so kann sich die deformierte Gestalt des Rohrquerschnittes nicht aufrecht erhalten, sondern die Verbiegung wird, sobald die störende Ursache entfernt ist, von selbst wieder rückgängig. Umgekehrt wird bei größerem p die Abplattung von selbst weiter fortschreiten und zu einem Zusammenbruche des Rohres führen. — Für das Trägheitsmoment Θ ist noch der Wert einzusetzen. Da es sich auf einen Streifen von der Länge 1 in der Richtung der Rohrachse bezieht, ist es gleich $\frac{h^3}{12}$, wenn die Wandstärke des Rohres mit h bezeichnet wird, und daher

$$p_k = \frac{E}{4}\left(\frac{h}{c}\right)^3. \tag{210}$$

Der hier behandelte Fall ist der erste, bei dem ein labiles elastisches Gleichgewicht bisher vorkam; ähnliche Fälle werden uns später noch begegnen, der wichtigste unter allen ist jener, der bei der Knickfestigkeit vorliegt. In Anknüpfung daran pflegt man die hier untersuchte Erscheinung, die jener bei der Knickfestigkeit genau gleicht, auch als ein Ausknicken der Rohrwand zu bezeichnen.

Wenn das Rohr nur kurz und an den Enden durch Böden oder in anderer Weise versteift ist, kann die hier besprochene Ausknickung der Rohrwand nicht zu Stande kommen. Bei dem Flammrohre eines Dampfkessels ist die Länge immer so groß gegen den Durchmesser, daß diese Versteifung das Ausknicken des mittleren Teiles nicht zu verhüten vermag. Dagegen sucht

man in solchen Fällen öfters dadurch eine größere Steifigkeit der Rohrwand herbeizuführen, daß man in gewissen Abständen Ringe aus Winkeleisen usw. herumlegt. In solchen Fällen muß man sich zur Berechnung an Stelle von Gl. (210) der Gl. (209) bedienen, indem man den Zuwachs des Trägheitsmomentes durch den Ring auf einen Streifen von der Länge 1 ausschlägt.

§ 56. Dickwandige Röhren.

Der Einfachheit wegen betrachte ich nur den Fall, daß das Rohr einem inneren Überdrucke ausgesetzt ist; für äußeren Überdruck gelten die Betrachtungen ebenfalls, wenn man nur überall die Vorzeichen der Dehnungen und Spannungen umkehrt.

Aus Symmetriegründen folgt, daß von den drei Hauptachsen des Spannungszustandes für jede Stelle der Rohrwand eine parallel zur Rohrachse geht, eine zweite in die Richtung des Radius und eine dritte in die Richtung der Tangente an den Kreis fällt, der durch den gegebenen Punkt von der Rohrachse aus gelegt werden kann. Um die Spannungen und Dehnungen in der Richtung der Rohrachse will ich mich jetzt nicht kümmern; man kann sie nachträglich ermitteln und in Berücksichtigung ziehen. Wichtiger sind die beiden anderen Hauptspannungen und namentlich die in der Richtung der Tangente σ_t, denn man weiß schon aus den vorausgehenden Untersuchungen, daß die Bruchgefahr in erster Linie von ihr abhängt.

Um dieser Behandlung der Aufgabe den geeigneten Ausdruck zu geben, setze ich jetzt voraus, daß das Rohr an den Enden nicht geschlossen sei und sich in der Richtung der Rohrachse beliebig ausdehnen und zusammenziehen könne, während zugleich auf die Innenwand der spezifische Druck p ausgeübt wird. Um das Mitschleppen eines überflüssigen Faktors zu vermeiden, betrachte ich wieder ein Stück des Rohres von der Länge $= 1$.

Unter dem Einflusse des inneren Druckes erweitert sich das Rohr und die elastische Vergrößerung, die ein Radius x

erfährt, der nach irgend einem Teilchen der Rohrwand gezogen ist, sei mit u bezeichnet. Wenn u als Funktion von x bekannt wäre, könnte man daraus die Dehnungen ε_t und ε_r in der Richtung der Tangente und des Radius und hiermit auch die zugehörigen Spannungen σ_t und σ_r berechnen; die Aufgabe wäre also gelöst. Es wird sich also vor allen Dingen darum handeln, diese Funktion u zu bestimmen.

In Abb. 63 ist ein Querschnitt des Rohres gezeichnet und durch zwei Radien, die den Zentriwinkel $d\alpha$ miteinander bilden, sowie durch zwei Kreisbögen mit den Halbmessern x und $x + dx$ ist ein Flächenelement abgegrenzt. Diesem Flächenelemente entspricht ein Volumenelement des Rohres, für das wir die Bedingung für das Gleichgewicht der daran angreifenden Spannungen anschreiben wollen; dies wird uns zur Lösung der Aufgabe führen. In Abb. 64 (s. S. 294) ist das Volumelement noch besonders herausgezeichnet mit der Angabe der daran angreifenden Spannungen.

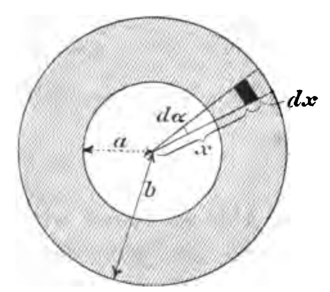


Abb. 63.

Zunächst bemerke ich, daß die spezifische Dehnung in der Richtung der Tangente

$$\varepsilon_t = \frac{u}{x} \tag{211}$$

gesetzt werden kann, denn die Länge eines Kreisumfangs wächst proportional mit dem Radius. Für die spezifische Dehnung in der Richtung des Radius erhält man dagegen

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dx}, \tag{212}$$

denn aus dx wird nach der Formänderung $dx + du$. Man sieht sofort ein, daß in Wirklichkeit in der Richtung des Radius eine Verkürzung eintreten, daß also du und hiermit ε_r negativ werden muß. Ich lasse indessen die Gleichung in der angeschriebenen Form stehen. Die weitere Untersuchung muß dann von selbst zu einem negativen Werte von ε_r führen.

Damit hängt es auch zusammen, daß ich σ_r in Abb. 64 mit einem Pfeile eingezeichnet habe, der eine Zugspannung bedeutet. Wenn nicht ausdrücklich etwas anderes verabredet wird, haben wir die vorkommenden Spannungen zunächst immer als Zugspannungen und die spezifischen Längenänderungen als Dehnungen zu betrachten und als solche positiv in die Rechnung einzuführen. Das Ergebnis der Rechnung gibt dann durch das schließlich herauskommende Vorzeichen zu erkennen, welche der vorkommenden Spannungen in Wirklichkeit Druckspannungen sind.

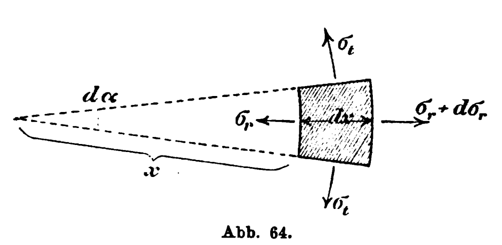


Abb. 64.

Die Spannungen σ_t in Abb. 64 fassen wir zunächst zu einer Resultierenden zusammen. Auf jeder der beiden Seitenflächen haben wir $dx \cdot \sigma_t$ und wenn wir diese beiden Kräfte mit Hilfe eines Kraftdreiecks zu einer Resultierenden vereinigen, erhält diese die Größe

$$dx\sigma_t d\alpha.$$

Nun betrachten wir die Spannungen σ_r. Auf der inneren Fläche haben sie die Größe

$$\sigma_r x d\alpha,$$

denn der zum Radius x und zum Zentriwinkel $d\alpha$ gehörende Bogen ist gleich $xd\alpha$. Gegenüber liegt die Spannung $\sigma_r + d\sigma_r$, die sich über die Fläche $(x + dx)d\alpha$ erstreckt. Beide Kräfte gehen in entgegengesetzter Richtung; es kommt also nur auf ihren Unterschied an, der auch unmittelbar als Differential des vorausgehenden Ausdruckes, also in der Form

$$\frac{d}{dx}(\sigma_r x)dxd\alpha$$

angeschrieben werden kann. Wenn σ_r und der Differentialquotient positiv sind, bedeutet dies eine Resultierende, deren Pfeil nach außen hin geht. Die Resultierende der σ_t geht dagegen bei positivem Werte von σ_t nach innen. Das Gleich-

gewicht gegen Verschieben in der Richtung des Radius erfordert daher, daß

$$\sigma_t = \frac{d}{dx}(\sigma_r x) \tag{213}$$

ist. Um diese Gleichung zur Ermittelung von u verwenden zu können, müssen wir zunächst die Spannungen in den Dehnungen ausdrücken. Nach dem Elastizitätsgesetze ist

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E}\left(\sigma_t - \frac{1}{m}\sigma_r\right); \qquad \varepsilon_r = \frac{1}{E}\left(\sigma_r - \frac{1}{m}\sigma_t\right)$$

und durch Auflösen nach σ_t und σ_r erhält man daraus

$$\sigma_t = \frac{mE}{m^2-1}(m\varepsilon_t + \varepsilon_r); \qquad \sigma_r = \frac{mE}{m^2-1}(m\varepsilon_r + \varepsilon_t),$$

oder, wenn man die Werte der Dehnungen aus den Gl. (211) und (212) einsetzt,

$$\sigma_t = \frac{mE}{m^2-1}\left(m\frac{u}{x} + \frac{du}{dx}\right); \qquad \sigma_r = \frac{mE}{m^2-1}\left(m\frac{du}{dx} + \frac{u}{x}\right).$$

Diese Ausdrücke führen wir in Gl. (213) ein. Sie geht dann über in

$$m\frac{u}{x} + \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}\left(mx\frac{du}{dx} + u\right).$$

Ich möchte noch ausdrücklich die Aufmerksamkeit auf den Zweck hinlenken, der diesen Umrechnungen zugrunde liegt. Gl. (213) gilt nämlich offenbar ganz allgemein, gleichgültig, ob der Körper dem Hookeschen Gesetze folgt oder nicht. Sie enthält aber zwei unbekannte Größen σ_t und σ_r, und da andere Gleichgewichtsbedingungen nicht zur Verfügung stehen, wäre es nicht möglich, beide Unbekannten aus dieser einen Gleichung zu bestimmen. Das Problem ist und bleibt statisch unbestimmt, so lange man nicht auf Grund der elastischen Eigenschaften des Körpers noch eine andere Beziehung angeben kann. In der Tat hat die Untersuchung der elastischen Formänderung hier und in allen solchen Fällen nur den Zweck, die in größerer Zahl vorkommenden Spannungskomponenten auf eine kleinere Zahl unbekannter Formänderungsgrößen zurückzuführen und dadurch die Lösung der Gleichungen zu ermöglichen. So sind wir hier jetzt dazu gelangt,

die Gl. (213) so umzuformen, daß nur noch die eine Unbekannte u in ihr vorkommt.

Die letzte Gleichung vereinfacht sich nach Ausführung der Differentiation auf der rechten Seite zu

$$x^2 \frac{d^2 u}{d x^2} + x \frac{d u}{d x} - u = 0. \tag{214}$$

Sie stimmt fast genau überein mit der Differentialgleichung (155) für die Meridiankurve der elastischen Fläche einer kreisförmigen Platte und in der Tat gleicht auch die vorausgehende Entwickelung in vielen Punkten und namentlich in dem ganzen Plane der Untersuchung der damals durchgeführten. Man braucht in Gl. (155) nur $N = 0$ zu setzen und die unabhängige Veränderliche mit u anstatt mit φ zu bezeichnen, um sie in Gl. (214) überzuführen. Daher gilt hier auch das frühere Integral, Gl. (156), in der Form

$$u = Bx + \frac{C}{x} \cdot \tag{215}$$

Es fehlt jetzt nur noch die Ermittelung der Integrationskonstanten B und C. Für u selbst sind hier gar keine Grenzbedingungen vorgeschrieben, wohl aber für σ_r, denn für $x = a$, also an der Innenfläche, muß $\sigma_r = -p$ und für $x = b$, also außen, muß $\sigma_r = 0$ werden. Um diese Bedingungen zur Berechnung der Integrationskonstanten verwerten zu können, muß man zunächst den Ausdruck für σ_r aufstellen. Durch Einsetzen von u aus Gl. (215) geht dieser über in

$$\sigma_r = \frac{mE}{m-1} B - \frac{mE}{m+1} \cdot \frac{C}{x^2} \cdot$$

Zur Abkürzung wollen wir dafür

$$\sigma_r = B' - \frac{C'}{x^2} \tag{216}$$

schreiben. Für die neuen Konstanten B' und C' hat man nun die Gleichungen

$$-p = B' - \frac{C'}{a^2}; \qquad 0 = B' - \frac{C'}{b^2},$$

aus denen durch Auflösen folgt

$$B' = p \frac{a^2}{b^2 - a^2}; \qquad C' = p \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \cdot \tag{217}$$

Für u hat man daher jetzt

$$u = p\frac{a^2}{mE(b^2 - a^2)}\left((m-1)x + (m+1)\frac{b^2}{x}\right). \qquad (218)$$

Ferner folgt für σ_r und σ_t

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= p\frac{a^2}{b^2 - a^2}\cdot\frac{x^2 - b^2}{x^2}\\ \sigma_t &= p\frac{a^2}{b^2 - a^2}\cdot\frac{x^2 + b^2}{x^2}\end{aligned}\right\}. \qquad (219)$$

Je kleiner x ist, desto größere Werte nehmen beide Hauptspannungen an. Das Material wird also am meisten an der Innenseite des Rohres beansprucht, was sich übrigens schon auf Grund einer einfachen Überlegung, die in § 54 angestellt wurde, voraussehen ließ. Nimmt man an, daß die Anstrengung des Materials von der größten Dehnung, also von σ_{red} abhänge, so findet man hierfür

$$\sigma_{\text{red}} = E[\varepsilon_t]_{x=a} = E\left(\frac{u}{x}\right)_{x=a} = \frac{p}{b^2 - a^2}\left(\frac{m-1}{m}a^2 + \frac{m+1}{m}b^2\right). \quad (220)$$

Anmerkung. Ein Schleifstein, der mit großer Winkelgeschwindigkeit rotiert, wird in ganz ähnlicher Weise beansprucht, wie ein dickwandiges Rohr durch einen inneren Überdruck. Um diese Aufgabe zu lösen, betrachtet man den ruhenden Schleifstein und bringt an jedem Massenelemente eine Zentrifugalkraft an, die nach bekannten Formeln berechnet werden kann. Der einzige Unterschied gegenüber der vorher behandelten Aufgabe besteht nun darin, daß die Belastung durch den inneren Flüssigkeitsdruck ersetzt ist durch die von den Zentrifugalkräften herrührende Belastung, die sich über alle Massenteilchen des Schleifsteins verteilt. Hiernach ist Gleichung (213) abzuändern, indem man auf der rechten Seite ein Glied zufügt, das der Belastung des Massenelementes durch die Zentrifugalkraft entspricht. Die weitere Untersuchung kann aber dann in derselben Weise zu Ende geführt werden, wie vorher. Die Grenzbedingungen bestehen darin, daß sowohl am äußeren als am inneren Rande der Scheibe σ_r zu Null wird. — Herr Prof. Grübler hat diese Aufgabe eingehend behandelt (Zeitschr. d. V. D. Ing. 1897, S. 860 und 1899, S. 1294) und auch eine Reihe von Versuchen zur Prüfung der Theorie ausgeführt. Bei diesen wurde die Umdrehungsgeschwindigkeit so lange gesteigert, bis der Bruch der Steine erfolgte. Es ergab sich dabei, in Übereinstimmung mit meinen früheren Untersuchungen über die Biegungs-

festigkeit der Steine, daß die wahre Zugfestigkeit der Steine jedenfalls erheblich größer ist, als sie durch unmittelbare Zugversuche gefunden wird.

Aufgaben.

38. Aufgabe. Eine biegsame Membran verschließt eine kreisförmige Öffnung und ist einem Überdrucke von der einen Seite her ausgesetzt. Man soll die entstehende Ausbauchung und die Spannung berechnen.

Lösung. Die Mittelebene geht in eine Kugelhaube über, deren Pfeil f als klein gegenüber dem Halbmesser r der Öffnung angesehen werden kann (vgl. Abb. 65). Wenn man den Radius der Kugelhaube mit R bezeichnet, hat man nach dem Pythagoräischen Satze

$$R^2 = r^2 + (R - f)^2,$$

woraus genau genug

$$f = \frac{r^2}{2R}$$

folgt. Der Winkel, den der äußerste Radius der Kugelhaube mit der Symmetrieachse bildet, sei mit φ bezeichnet, dann ist auch, da φ klein ist,

$$r = R \sin \varphi = R\varphi$$

und daher

$$f = \frac{r}{2} \varphi.$$

Abb. 65.

Der zu φ und zum Radius R gehörige Bogen ist gleich $R\varphi$; ursprünglich war diese Länge gleich r, also gleich $R \sin \varphi$. Hier dürfen wir nicht $\sin \varphi$ mit φ vertauschen, weil es gerade darauf ankommt, die kleine Dehnung, die die Membran bei der Formänderung erfährt, zu berechnen. Bezeichnen wir die spezifische Dehnung mit ε, so wird

$$\varepsilon = \frac{R\varphi - R \sin \varphi}{R\varphi} = \frac{\varphi - \sin \varphi}{\varphi} = \frac{\varphi^2}{6}.$$

Den letzten Wert erhält man durch Entwicklung der Sinusreihe, von der es genügt, die beiden ersten Glieder beizubehalten.

Aus der Dehnung folgt die Spannung σ der Membran in der Richtung des Meridians. Es genügt, wenn wir setzen

$$\sigma = E\varepsilon = \frac{E\varphi^2}{6}.$$

Andererseits müssen aber die Spannungen im Gleichgewichte mit den Druckkräften stehen, denen die Membran ausgesetzt ist. Dazu können wir uns der Gl. (199) bedienen, da es hierfür keinen Unterschied macht, ob die Kugelhaube zu einer ganzen Kugel gehört oder ob sie in anderer Weise gestützt ist. Wir haben also auch

$$\sigma = \frac{pR}{2h}$$

und die Gleichsetzung beider Ausdrücke liefert, wenn wir vorher noch beiderseits mit φ multiplizieren,

$$\frac{pr}{2h} = \frac{E\varphi^3}{6},$$

woraus

$$\varphi = \sqrt[3]{\frac{3pr}{Eh}}$$

folgt. Man braucht diesen Wert nur in die vorher schon aufgestellten Formeln für f und σ einzusetzen, um die Aufgabe zu lösen, also

$$f = \frac{r}{2}\sqrt[3]{\frac{3pr}{Eh}}; \qquad \sigma = \sqrt[3]{\frac{p^2E}{24} \cdot \frac{r^2}{h^2}}.$$

Die Lösung ist freilich nicht streng richtig, weil σ nicht nur von der Dehnung ε in der Richtung des Meridians, sondern auch von der in der Richtung des Parallelkreises abhängt, über die sich nur aussagen läßt, daß sie am Umfange gleich Null ist. Ebenso ist auch nicht sicher, ob die Dehnung ε in der Tat über die ganze Fläche hin gleich groß ist, wie es bei der Berechnung angenommen wurde. Für die praktische Anwendung sind die Formeln aber jedenfalls genau genug.

39. Aufgabe. Ein dünnwandiges Gefäß hat die Gestalt eines Rotationsellipsoides und ist einem inneren Überdrucke ausgesetzt; man soll den Spannungszustand der Gefäßwand untersuchen.

Anmerkung. Ein Ellipsoid und überhaupt jedes Gefäß von überall endlicher Krümmung (bei dem also an keiner Stelle einer der Hauptkrümmungsradien unendlich groß wird) kann einem inneren oder äußeren Überdrucke widerstehen, wenn die Wand auch so dünn ist, daß sie keinen merklichen Widerstand gegen Biegung leisten kann, während ein Zylinder dazu im allgemeinen nicht imstande ist.

Lösung. In Abb. 66 ist ein Meridianschnitt durch das Ellipsoid gezeichnet; die X-Achse sei die Rotationsachse. Ich lege zunächst einen Parallelkreisschnitt AA und betrachte das Gleichgewicht der dadurch abgegrenzten Haube. Der Symmetrie wegen sind die Spannungen σ_t (wie ich sie nennen will) dem ganzen Umfange nach gleichförmig verteilt. Bezeichnet man den Winkel, den die Tangente an den Meridianschnitt bei dem betreffenden Parallelkreise mit der Rotationsachse bildet mit φ, so ist

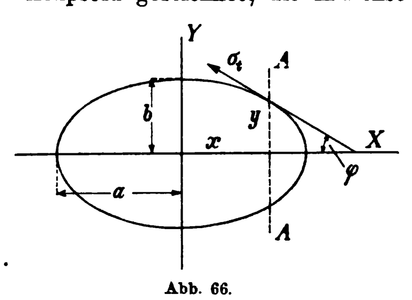


Abb. 66.

$$\sigma_t \cdot 2\pi y h \cdot \cos\varphi = \pi y^2 p$$

die Gleichgewichtsbedingung, aus der sich σ_t zu

$$\sigma_t = \frac{py}{2h\cos\varphi}$$

berechnet.

Soweit gleicht also das Verfahren vollständig dem bei der Berechnung des Kugelkessels angewendeten. Um aber auch die Ringspannungen σ_r zu finden, die in einem Meridianschnitte übertragen werden, genügt es nicht, das Gleichgewicht der einen Hälfte des Gefäßes ins Auge zu fassen, weil man nicht wissen kann, wie sich die Ringspannungen über den Umfang des Meridianschnittes verteilen. Man grenze daher (vgl. Abb. 67) aus der Kesselwand ein Element ab, das zwischen zwei Meridianschnitten, die den Winkel $d\alpha$ miteinander bilden, und zwischen zwei Parallelkreisschnitten, im Abstande dx voneinander, liegt. An den vier Umfangsseiten des Elementes wirken die Spannungen σ_r und σ_t und dazu kommt der

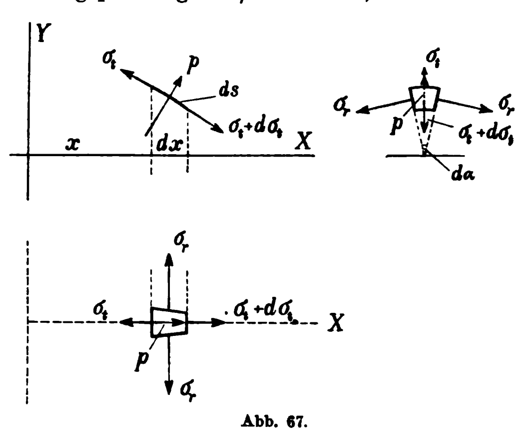


Abb. 67.

Flüssigkeitsdruck auf die Fläche des Elementes. Die fünf Kräfte müssen im Gleichgewichte miteinander stehen; wir brauchen dabei nur auf die Gleichgewichtsbedingung gegen Verschieben in der Richtung der Y-Achse zu achten, denn die Gleichgewichtsbedingung gegen Verschieben parallel zur Rotationsachse ist zur Berechnung von σ_t schon verwendet worden.

Das zwischen beiden Parallelkreisen liegende Element des Meridians (also das Bogenelement der Ellipse) sei mit ds bezeichnet. Die Spannungen σ_r an beiden Meridianschnittflächen geben zusammen die Komponente

$$\sigma_r h ds \cdot d\alpha$$

mit dem Pfeile nach unten zu gerichtet. Die Spannung σ_t im ersten Parallelkreisschnitte (vom Radius y) hat die Größe $\sigma_t h y d\alpha$ und die Komponente ist gleich $\sigma_t h y d\alpha \sin\varphi$; der Pfeil ist nach außen gekehrt. Entgegengesetzt gerichtet ist aber die Komponente am zweiten Parallelkreisschnitte. Der Unterschied zwischen beiden Komponenten ist das Differential des vorhergehenden Ausdruckes, also

$$\frac{d}{dx}(\sigma_t y \sin\varphi) h d\alpha dx,$$

und bedeutet eine nach abwärts gekehrte Kraft. Der Flüssigkeitsdruck auf die Fläche endlich hat die Komponente

$$p ds y d\alpha \cos\varphi \quad \text{oder} \quad p y d\alpha dx,$$

die nach außen hin gewendet ist. Die Gleichgewichtsbedingung lautet demnach, wenn man mit $d\alpha \cdot dx$ dividiert und vorher den Wert von σ_t einsetzt,

$$\sigma_r h \frac{ds}{dx} - py + \frac{d}{dx}\left(p \frac{y^2 \operatorname{tg}\varphi}{2}\right) = 0,$$

woraus man mit $dx = ds \cos\varphi$

$$\sigma_r = \frac{p}{h} \cos\varphi \left(y - \frac{d}{dx}\left(\frac{y^2}{2} \operatorname{tg}\varphi\right)\right)$$

erhält. — Bis dahin gilt die Betrachtung für jede beliebige Gestalt des Meridianschnittes. Nachträglich kann man aus der Ellipsengleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

den Winkel φ mit Hilfe der Beziehung

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{dy}{dx}$$

in den Koordinaten ausdrücken und durch Einsetzen in den vorhergehenden Ausdruck σ_r als Funktion von x darstellen.

40. Aufgabe. Die Berechnung der Spannungen eines dünnwandigen ringförmigen Gefäßes von kreisförmigem Querschnitte, das unter einem inneren Überdrucke steht, soll in allgemeinen Umrissen angegeben werden.

Lösung. Ein Schnitt *mm* (Abb. 68) senkrecht zur Rotationsachse trifft die Gefäßwand nach zwei Kreisen. Wenn man nun aber auch aus Symmetriegründen schließen kann, daß die Spannungen σ_t längs des Umfanges jedes dieser Kreise gleichförmig verteilt sind, so sind sie doch sicher im inneren Kreise verschieden von denen längs des äußeren Kreises und man kommt daher mit der Betrachtung des Gleichgewichtes des oben abgeschnittenen

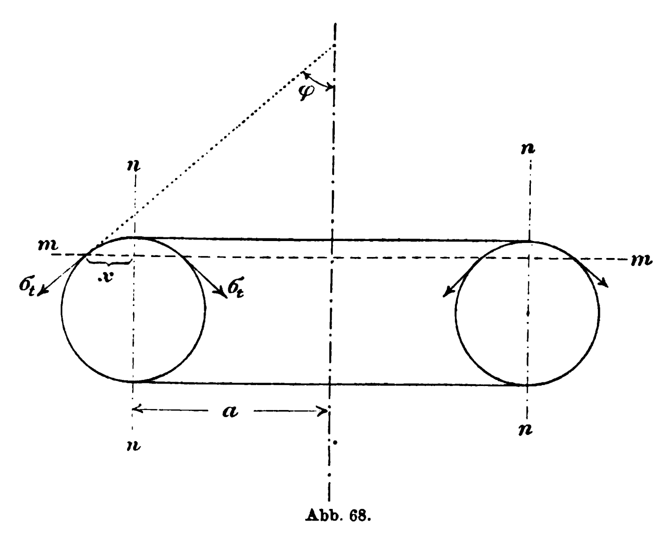


Abb. 68.

Teils nicht aus. Deshalb denken wir uns den oberen Teil noch durch einen Ringschnitt *nn* in zwei Hälften geteilt. Innerhalb dieses Ringschnittes treten nur horizontal gerichtete Kräfte auf; wir können daher eine Gleichgewichtsbedingung für Verschieben jeder Hälfte in vertikaler Richtung aufstellen, in der das zugehörige σ_t als einzige Unbekannte auftritt. So hat man für den nach außen hin liegenden Teil unter Benutzung der in die Abbildung eingeschriebenen Bezeichnungen

$$\sigma_t 2\pi(x + a)h \cos\varphi = p\pi\left((a + x)^2 - a^2\right),$$

woraus mit Berücksichtigung der Beziehung $\cos\varphi = \frac{x}{r}$

$$\sigma_t = p\frac{r}{h} \cdot \frac{2x + x}{2a + 2x}$$

folgt. Nachdem die Spannungen σ_t bekannt sind, können die Ringspannungen genau auf die Art wie bei der Lösung der vorigen Aufgabe ermittelt werden.

41. Aufgabe. Wie stark muß die Wand eines Flammrohres von 80 cm Durchmesser gewählt werden, wenn der äußere Überdruck 10 atm beträgt und fünffache Sicherheit gegen Ausknicken verlangt wird?

Lösung. Der kritische Überdruck ist nach Gl. (210)

$$p_k = \frac{E}{4}\left(\frac{h}{r}\right)^3.$$

Wir setzen in diese Gleichung, der verlangten fünffachen Sicherheit wegen, $p_k = 50$ atm, $r = 40$ cm und $E = 2 \cdot 10^6$ (für Schweißeisen) ein und lösen sie nach h auf; wir erhalten

$$h = r\sqrt[3]{\frac{4p_k}{E}} = 40\sqrt[3]{\frac{200}{2 \cdot 10^6}} = 1{,}856 \text{ cm}.$$

Bei Anwendung von Versteifungsringen kann h schwächer gewählt werden; es muß nur dafür gesorgt werden, daß die Ringe nicht zu weit auseinander sitzen und daß das Trägheitsmoment des Versteifungsringes das Trägheitsmoment des Blechs von der berechneten Stärke h auf eine Länge, die gleich dem Abstande der Versteifungsringe voneinander ist, mindestens ersetzt.

42. Aufgabe. Man soll die in § 56 für die dickwandigen Röhren gegebene Rechnung auf den Fall eines kugelförmigen Gefäßes von größerer Wandstärke übertragen.

Lösung. Abb. 63 bedeute jetzt den Querschnitt durch die Kugel; in diesem Sinne verwenden wir alle dort eingeschriebenen Bezeichnungen. Die Gl. (210) und (211) für die Dehnungen bleiben bestehen. Das Element, an dem das Gleichgewicht der Kräfte betrachtet wird, gehöre zu einem Kreiskegel mit dem Winkel $d\alpha$ an der Spitze. Die Komponente der σ_t in der Richtung des Radius ist dann

$$\frac{1}{2}\sigma_t \pi x dx d\alpha^2.$$

Die Spannungen σ_r an der zum Radius x gehörigen Basisfläche betragen zusammen $\sigma_r \frac{\pi}{4}(x\,d\alpha)^2$ und das Differential davon ist

$$\frac{\pi}{4} \cdot \frac{d}{dx}(x^2 \sigma_r)\,dx\,d\alpha^2.$$

An Stelle von Gl. (213) erhalten wir daher

$$\sigma_t \cdot x = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dx}(x^2 \sigma_r).$$

Die beiden Unbekannten σ_r und σ_t sind jetzt in u auszudrücken. Dabei ist zu beachten, daß hier

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E}\left(\frac{m-1}{m}\sigma_t - \frac{1}{m}\sigma_r\right); \quad \varepsilon_r = \frac{1}{E}\left(\sigma_r - \frac{2}{m}\sigma_t\right)$$

ist, weil die Spannungen σ_t hier von allen Seiten her wirken (d. h. zwei der drei Hauptspannungen sind gleich σ_t). Die Auflösung liefert

$$\sigma_t = \frac{mE}{m^2 - m - 2}(m\varepsilon_t + \varepsilon_r); \quad \sigma_r = \frac{mE}{m^2 - m - 2}\left((m-1)\varepsilon_r + 2\varepsilon_t\right)$$

oder mit Rücksicht auf die Gl. (211) und (212)

$$\sigma_t = \frac{mE}{m^2 - m - 2}\left(m\frac{u}{x} + \frac{du}{dx}\right); \quad \sigma_r = \frac{mE}{m^2 - m - 2}\left((m-1)\frac{du}{dx} + \frac{2u}{x}\right).$$

Die Differentialgleichung geht nach Einführen dieser Werte über in

$$2x\left(m\frac{u}{x} + \frac{du}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left((m-1)x^2\frac{du}{dx} + 2ux\right)$$

oder nach Ausführung der Differentiation, Wegheben der Glieder, die gegeneinander fortfallen und Division mit $(m-1)$

$$x^2\frac{d^2u}{dx^2} + 2x\frac{du}{dx} - 2u = 0.$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist

$$u = Bx + \frac{C}{x^2}.$$

Damit folgt für σ_r

$$\sigma_r = \frac{mE}{m^2 - m - 2}\left((m+1)B - (m-2)\frac{2C}{x^3}\right)$$
$$= \frac{mE}{m-2}B - \frac{2mE}{m+1} \cdot \frac{C}{x^3}.$$

Wenn der Überdruck von innen her wirkt (im entgegengesetzten Falle wäre ganz ähnlich zu verfahren) ist $\sigma_r = 0$ für $x = b$ und $\sigma_r = -p$ für $x = a$, also

$$\frac{B}{m-2} - \frac{2C}{(m+1)b^3} = 0; \quad \frac{B}{m-2} - \frac{2C}{(m+1)a^3} = -\frac{p}{mE}$$

und hieraus

$$B = \frac{m-2}{m} \cdot \frac{a^3}{b^3 - a^3} \cdot \frac{p}{E}; \quad C = \frac{m+1}{2m} \cdot \frac{a^3 b^3}{b^3 - a^3} \cdot \frac{p}{E}.$$

Nachdem die Integrationskonstanten bestimmt sind, findet man alle Spannungen und die Anstrengung des Materials genau so wie bei den dickwandigen Röhren in § 56.

Neunter Abschnitt.

Die Verdrehungsfestigkeit.

§ 57. Wellen von kreisförmigem Querschnitte.

Ein Stab, der auf Verdrehen beansprucht wird, heißt im Maschinenbau eine Welle. Wenn der Querschnitt ein Kreis ist, muß man von vornherein erwarten, daß alle Punkte, die vorher auf einer Querschnittsebene enthalten waren, nach der Formänderung auch noch in einer zur Achse senkrechten Ebene liegen. Der Symmetrie wegen könnte nämlich der Querschnitt jedenfalls nur in eine Umdrehungsfläche übergehen. Es ist aber nicht wohl einzusehen, weshalb diese Umdrehungsfläche ihre Hohlseite eher nach der einen, als nach der entgegengesetzten Seite kehren sollte, oder mit anderen Worten, weshalb die Fläche nach vorn hohl sein sollte, wenn man den Stab in einem bestimmten Sinne verdreht. Unserem Symmetriegefühle nach müssen wir erwarten, daß die Umkehrung des Drehsinns keinen Einfluß auf die Gestalt der Fläche haben kann, in die der Querschnitt übergeht.

Freilich darf man sich auf Symmetriebetrachtungen dieser Art nicht zu sehr verlassen. Daß ein geradliniger elektrischer Strom eine parallele Magnetnadel in einem bestimmten Sinne dreht, verstößt zunächst auch gegen unser Symmetriegefühl und bleibt darum doch Tatsache. Jedenfalls ist aber eine Betrachtung solcher Art ausreichend, um eine Vermutung darauf zu gründen; ich füge noch hinzu, daß sich diese Vermutung sowohl durch weitere theoretische Betrachtungen, die ich in

einem späteren Abschnitte darlegen werde, als auch, wie es scheint, durch die Erfahrung selbst, bestätigt hat. Freilich ist die Zahl der Verdrehungsversuche, die man etwa als beweiskräftig hierfür heranziehen könnte, sehr gering. Übrigens nahm man früher bei der Torsion ganz ebenso allgemein, wie bei der Biegung an, daß die Querschnitte auch bei beliebiger Gestalt nach der Formänderung eben blieben. Diese Annahme hat sich indessen als vollständig unrichtig herausgestellt. Querschnitte, die nicht kreisförmig sind, bleiben vielmehr sicher nicht eben bei der Verdrehung. Erfahrung und Theorie lehren dies übereinstimmend.

Bei der Verdrehung einer Welle von kreisförmigem Querschnitte geht jede zur Achse parallel gezogene Gerade in ein Stück einer Schraubenlinie über. Zwei Halbmesser, die in zwei um die Länge l voneinander entfernten Querschnitten parallel zueinander gezogen waren, bilden nach der Verdrehung einen Winkel miteinander, den man den Verdrehungswinkel heißt, und den wir mit $\Delta\varphi$ bezeichnen.

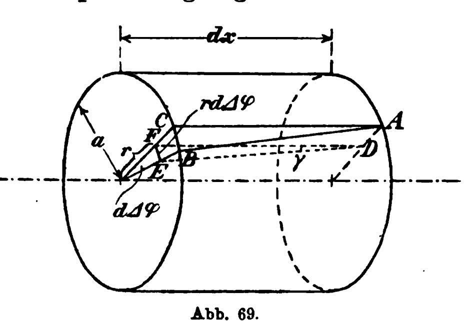


Abb. 69.

In Abb. 69 ist ein Wellenelement von der Länge dx gezeichnet. AB ist das Element der Schraubenlinie, das ursprünglich mit der Zylindererzeugenden zusammenfiel. Der Verdrehungswinkel für die Länge dx sei $d\Delta\varphi$, dann ist

$$d\Delta\varphi = \Delta\varphi \frac{dx}{l}.$$

Die Schraubenlinie AB bildet jetzt irgend einen spitzen Winkel mit der Querschnittsebene, während die durch dieselben Teilchen vor der Formänderung gezogene Linie AC rechtwinklig zum Querschnitte stand. Einer solchen Winkeländerung entspricht eine Schubspannung τ im Querschnitte, die nach dem Elastizitätsgesetze daraus berechnet werden kann.

Wir finden die relative Verschiebung von zwei im Abstande r von der Achse in benachbarten Querschnitten ursprünglich einander gegenüberliegenden Punkten D und F, wenn wir den Winkel, um den sich die Querschnitte gegeneinander drehen, mit dem Halbmesser r multiplizieren, also gleich

$$r d\Delta\varphi \quad \text{oder} \quad r\Delta\varphi\frac{dx}{l}.$$

Um soviel ist der eine Endpunkt der Strecke dx, die die gleich gelegenen Punkte beider Querschnitte verbindet, gegen den anderen und zwar in der Richtung senkrecht zum Radius r verschoben worden. Der ursprünglich rechte Winkel zwischen dx und der Querschnittsfläche hat sich dabei um einen Betrag γ geändert und zwar so, daß γdx ebenfalls ein Ausdruck für die relative Verschiebung ist. Ein Vergleich beider Ausdrücke liefert

$$\gamma = \frac{r\Delta\varphi}{l}.$$

Nach dem Elastizitätsgesetze folgt aber die Schubspannung aus γ durch Multiplikation mit dem Schubelastizitätsmodul, also

$$\tau = G\gamma = \frac{Gr\Delta\varphi}{l}. \tag{221}$$

Daß τ senkrecht zum Radius gerichtet ist, folgt daraus, daß auch die elastische Verschiebung in diesem Sinne erfolgte.

Aus Gl. (221) erkennen wir, daß die Schubspannungen τ nach einem Geradliniengesetze über den Querschnitt verteilt sind, nämlich proportional mit den Abständen r von der Mitte zunehmen. In der Mitte wird τ zu Null und die größte Beanspruchung des Materials findet am Umfange statt. Bezeichnen wir die Spannung am Rande mit τ' und den Halbmesser des Querschnittes mit a, so ist nach Gl. (221)

$$\tau = \frac{\tau' r}{a} \tag{222}$$

und zur Berechnung von τ' steht uns eine Momentengleichung zur Verfügung. Alle Schubspannungen, die sich über den Querschnitt verteilen, lassen sich zu einem Kräftepaare zusammensetzen, dessen statisches Moment gleich dem von den

äußeren Kräften herrührenden Verdrehungsmomente sein muß. Bezeichnen wir das Torsionsmoment mit M, so ist

$$M = \int \tau dF r = \frac{\tau'}{a} \int r^2 dF = \frac{\tau'}{a} \Theta_p.$$

Hier ist mit Θ_p das polare Trägheitsmoment des kreisförmigen Querschnittes bezeichnet, also $\Theta_p = \frac{\pi a^4}{2}$. Durch Auflösen nach τ' erhält man

$$\tau' = \frac{M}{\Theta_p} \cdot a \tag{223}$$

oder auch nach Einsetzen des Wertes von Θ_p

$$\tau' = \frac{2M}{\pi a^3}. \tag{224}$$

Man gibt häufig der Form (223) den Vorzug, weil sie sich genau an die Formel für die Biegung anschließt. Früher freilich, als man noch glaubte, daß auch die Querschnitte von anderer Gestalt bei der Verdrehung eben blieben, bezog man die ganze Entwickelung, die hier nur für kreisförmige Querschnitte abgeleitet ist, sofort auch auf jene und Gl. (223) galt als die allgemeine Formel für die Berechnung der Torsionsspannungen. Da man jetzt weiß, daß Gl. (223) nur für den kreisförmigen Querschnitt gültig ist, hat es keinen Zweck, Θ_p in dieser allgemeinen Form stehen zu lassen, sondern man thut besser, sofort den Wert dafür einzusetzen, also Gl. (224) zu benutzen.

Für den Verdrehungswinkel $\Delta\varphi$ erhält man nach Gl. (221)

$$\Delta\varphi = \frac{\tau l}{Gr} = \frac{\tau' l}{Ga} = \frac{2Ml}{\pi a^4 G}. \tag{225}$$

Die einzige weitere Ausdehnung, die diese Formeln zulassen, ist die auf Wellen von kreisringförmigem Querschnitte. Wenn die beiden Querschnitthalbmesser der hohlen Welle mit a und b bezeichnet werden ($a > b$), erhält man

$$\tau' = \frac{2Ma}{\pi(a^4 - b^4)}; \quad \Delta\varphi = \frac{2Ml}{\pi(a^4 - b^4)G}.$$

§ 58. **Wellen von elliptischem Querschnitte.**

Daß der Querschnitt einer solchen Welle bei der Verdrehung nicht eben bleiben kann, erkennt man am einfachsten daraus, daß in diesem Falle die Entwickelungen des vorigen Paragraphen auch für sie gültig blieben und daß daher τ überall rechtwinklig zum Radiusvektor stehen müßte, der nach der betreffenden Stelle von der Mitte aus gezogen ist. Am Umfange ist dies aber nicht möglich, indem dort nach den allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen, die wir im ersten Abschnitte untersuchten und die zu den Gl. (4) führten, die Schubspannung keine Komponente in der Richtung senkrecht zum Umfange haben kann. Die Schubspannung muß vielmehr überall am Umfange in die Richtung der Tangente fallen. Diesen Satz muß man bei allen Betrachtungen über die Torsionsfestigkeit in die vorderste Stelle rücken; eine Abweichung davon könnte nur dann eintreten, wenn die Welle am Umfange nicht frei, sondern durch irgend einen anderen Körper so gestützt wäre, daß Kräfte, also etwa Reibungen, am Umfange auf sie übertragen würden, die parallel zur Achse gerichtet wären. Selbstverständliche Voraussetzung bei Untersuchung der verdrehten Welle ist indessen, daß die Welle am Umfange frei sein soll. Wenn das Ende der Welle z. B. in der Einspannvorrichtung einer Festigkeitsmaschine steckt, trifft für dieses Ende die Voraussetzung allerdings nicht zu; wie sich die Spannungen an der Einspannstelle

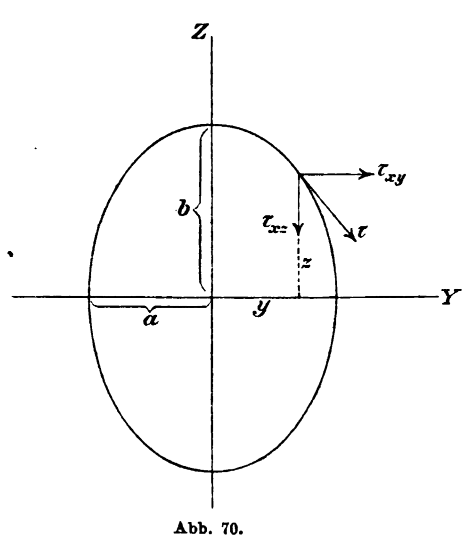


Abb. 70.

verteilen, kann also aus unseren Betrachtungen nicht geschlossen werden. Auf solche Fälle sollen sie sich aber auch gar nicht beziehen.

Die Gleichung der Ellipse, die den Querschnittsumriß bildet (Abb. 70 S. 310), sei

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

Für den Punkt mit den Koordinaten y und z hat man dann

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{y}{z},$$

und weil die Schubspannung τ den Umfang berührt, muß die Gleichung bestehen

$$\frac{\tau_{xz}}{\tau_{xy}} = \frac{dz}{dy} = -\frac{b^2 y}{a^2 z}. \tag{226}$$

Diese Bedingung wird durch die Annahme erfüllt, daß die Schubspannungskomponenten in der Form

$$\tau_{xy} = ka^2 z; \quad \tau_{xz} = -kb^2 y \tag{227}$$

dargestellt werden können. An und für sich könnte der hierbei eingeführte Faktor k an verschiedenen Stellen des Querschnittes und selbst an verschiedenen Stellen des Umfanges verschiedene Werte annehmen, d. h. er ist zunächst selbst als eine unbekannte Funktion der Querschnittskoordinaten anzusehen. Unsere Absicht geht aber hier darauf hinaus, eine möglichst einfache Theorie des ganzen Vorganges abzuleiten, selbst auf die Gefahr hin, daß sie nicht völlig genau mit den Tatsachen übereinstimmen sollte. Der Vergleich mit der Erfahrung bleibt uns immer offen und er würde uns bald belehren, wenn wir uns erheblich geirrt haben sollten. In der Tat ist ja auch die ältere Theorie der Verdrehungsfestigkeit, die von der Annahme ausging, die Querschnitte blieben eben, bald widerlegt worden und nur wegen des Widerspruchs, in dem ihre Folgerungen mit den Beobachtungstatsachen standen, ließ man sie fallen; der Widerspruch mit der Saint-Vénantschen Theorie allein würde keinen Techniker gestört haben. Der Widerspruch mit der Erfahrung aber bewies, daß jene ältere Betrachtung

eine Bedingung außer acht ließ, deren Vernachlässigung zu den gröbsten Irrtümern führte. Durch die Gl. (227) haben wir diese Bedingung weiterhin als verbindlich für unsere Betrachtungen anerkannt. Nachdem dieser unerläßliche Schritt geschehen ist, wollen wir uns aber im übrigen möglichst eng an die einfachen Betrachtungen der älteren Theorie anlehnen, indem wir uns der Hoffnung hingeben, die Beobachtungstatsachen hinreichend genau wiedergeben zu können, nachdem wenigstens der gröbste Fehler der älteren Betrachtung gehoben ist.

In diesen Sätzen habe ich wenigstens die Auffassung geschildert, mit der man — meiner eigenen Meinung nach — an diese Untersuchungen herantreten sollte. Es ist ganz unerheblich, wenn ich noch hinzufüge, daß die Theorie, zu der man so gelangt, bei der Welle mit elliptischem Querschnitte mit der von de St. Vénant aus den Grundgleichungen der mathematischen Elastizitätslehre abgeleiteten in den Resultaten völlig übereinstimmt.

Ich nehme also jetzt willkürlich an, daß es genüge, den Faktor k in den Gl. (227) als eine Konstante zu betrachten. Dann wächst die Schubspannung τ, wenn wir von der Mitte aus längs eines Halbmessers nach dem Umfange hin weiter gehen, immer noch in demselben Verhältnisse wie der Abstand von der Mitte und sie behält in allen Punkten des Halbmessers dieselbe Richtung. Für Punkte, die auf verschiedenen Halbmessern in gleichem Abstande von der Mitte liegen, ist τ jetzt allerdings verschieden groß, und auch der Winkel, den die Richtung von τ mit der Richtung des Halbmessers bildet, wechselt mit dem Halbmesser. Darin liegt die einzige Abweichung von den Annahmen der älteren Theorie, zu der wir uns notgedrungen entschließen mußten.

Es bleibt uns jetzt nur noch übrig, die Konstante k in den Gl. (227) zu berechnen. Natürlich hängt deren Größe von dem Werte des Verdrehungsmomentes M ab und zu ihrer Ermittelung wird uns daher eine Momentengleichung verhelfen. Für den Mittelpunkt als Momentenpunkt ist das sta-

tische Moment der in einem Flächenelemente dF übertragenen Spannung τdF gleich

$$\tau_{xy} dF \cdot z - \tau_{xz} dF \cdot y,$$

und nach Einsetzen der Werte aus den Gl. (227) erhält man daher die Momentenbedingung

$$M = ka^2 \int z^2 dF + kb^2 \int y^2 dF. \qquad (228)$$

Die Integrale sind über den ganzen Querschnitt auszudehnen und stellen die Trägheitsmomente für die Koordinatenachsen dar. Man kennt die Trägheitsmomente für die Ellipse (vgl. § 21, S. 108), nämlich

$$\int y^2 dF = \pi \frac{ba^3}{4}; \qquad \int z^2 dF = \pi \frac{ab^3}{4}.$$

Setzt man diese Werte in Gl. (228) ein und löst diese dann nach k auf, so erhält man

$$k = \frac{2M}{\pi a^3 b^3}. \qquad (229)$$

Hiermit sind wir in den Stand gesetzt, die Spannung τ an jeder Stelle nach Größe und Richtung anzugeben. Es fragt sich jetzt noch, wo τ seinen größten Wert annimmt. Jedenfalls muß dies irgendwo am Umfange geschehen, denn τ wächst, je weiter wir auf einem gegebenen Halbmesser von der Mitte abrücken. Am nächsten liegt wohl die Vermutung, daß τ am Ende der großen Achse den größten Wert erreiche und nach der älteren Theorie nahm man dies früher in der Tat allgemein an. Die Vermutung ist aber irrig. Um uns davon zu überzeugen, setzen wir nach dem Pythagoräischen Satze und nach den Gl. (227)

$$\tau^2 = \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 = k^2(a^4 z^2 + b^4 y^2).$$

Da nur die Spannungen am Umfange in Frage kommen, können wir z nach der Ellipsengleichung in y ausdrücken und erhalten

$$\tau^2 = k^2 b^2 (a^4 + y^2 [b^2 - a^2]).$$

Wenn b größer als a ist, wie in Abb. 70 angenommen wurde, müssen wir y möglichst groß annehmen, um den größten

Wert von τ^2 zu erhalten. Der größte Wert von y ist aber a, d. h. die größte Spannung tritt am Ende der kleinen Achse auf. Wir erhalten

$$\tau_{\max} = kab^2$$

oder nach Einsetzen von k aus Gl. (229)

$$\tau_{\max} = \frac{2M}{\pi a^2 b}. \qquad (230)$$

Am Ende der großen Halbachse, also für $y = 0$, wird

$$\tau = ka^2 b = \frac{2M}{\pi a b^2},$$

also im Verhältnisse $a : b$ kleiner.

§ 59. Wellen von rechteckigem Querschnitte.

Auch für diesen Querschnitt soll eine Näherungstheorie nach denselben Grundsätzen wie im vorigen Paragraphen entwickelt werden; ich bemerke aber sofort, daß die Formel, auf die man hierbei geführt wird, in der Tat nur eine Näherungsformel bleibt und nicht nachträglich durch die genauere Untersuchung nach den Methoden der mathematischen Elastizitätstheorie bestätigt wird.

Zunächst müssen wir hier unser Augenmerk auf die Symmetrieeigenschaften lenken, die dem rechteckigen Querschnitte zukommen. Wenn die Pfeile der Schubspannungskomponenten τ_{xy} und τ_{xz} für ein im ersten Quadranten liegendes Flächenelement die in Abb. 71 (s. S. 315) angenommene Richtung haben, müssen die Pfeile in den drei anderen Quadranten die ebenfalls dort eingetragenen Richtungen annehmen, da die Verdrehung in allen Quadranten überall in derselben Drehrichtung vor sich geht, die Spannungen also überall ein Moment von demselben Vorzeichen in Bezug auf den Koordinatenursprung annehmen müssen. Außerdem folgt, daß bei spiegelbildlich zueinander liegenden Flächenteilen die Absolutbeträge der in derselben Achsenrichtung gehenden Komponenten einander gleich sind. Wir können dies dahin ausdrücken, daß

τ_{xy} eine gerade Funktion von y und eine ungerade Funktion von z ist, während umgekehrt τ_{xz} eine ungerade Funktion von y und eine gerade von z sein muß.

Ein lineares Gesetz für die Verteilung der Spannungskomponenten über den Querschnitt ist hier nicht möglich, da z. B. τ_{xy} sowohl für $y = a$ als im Koordinatenursprunge verschwinden muß. Wir wollen aber, indem wir diesen Grenzbedingungen am Umfange vollständig Rechnung tragen, das damit noch verträgliche, sonst aber möglichst einfach gestaltete Spannungsverteilungsgesetz zugrunde legen. Vor allem wollen wir also annehmen, daß die Spannungskomponenten hinreichend genau durch algebraische Funktionen der Querschnittskoordinaten y und z dargestellt werden können und wir wollen ferner den Grad dieser Funktionen so niedrig annehmen, als es möglich ist, ohne die Grenzbedingungen zu verletzen. Dazu reicht eine Funktion dritten Grades aus. Mit Rücksicht darauf, daß τ_{xy} gerade in Beziehung auf y und ungerade in Beziehung auf z sein soll, setzen wir daher zunächst

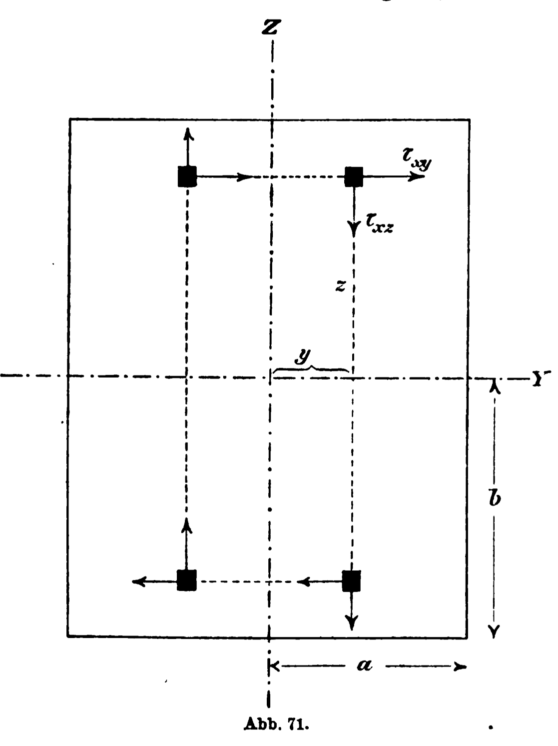


Abb. 71.

$$\tau_{xy} = c_1 z + c_2 z y^2 + c_3 z^3.$$

Nun muß an den zur Z-Achse parallelen Querschnittsseiten,

also für $y = \pm a$ dieser Ausdruck identisch, d. h. für jedes z, verschwinden. Dies liefert die Bedingungsgleichung

$$0 = c_1 z + c_2 a^2 z + c_3 z^3,$$

aus der, weil sie identisch erfüllt sein muß,

$$c_3 = 0; \quad c_2 = -\frac{c_1}{a^2}$$

folgt. Damit ist τ_{xy} bis auf eine Konstante bestimmt, nämlich

$$\tau_{xy} = c_1 z - \frac{c_1}{a^2} z y^2. \tag{231}$$

Ähnlich verfahren wir mit τ_{xz}; wir setzen zunächst

$$\tau_{xz} = k_1 y + k_2 y z^2 + k_3 y^3.$$

Für $z = \pm b$ muß dies verschwinden, also

$$0 = k_1 y + k_2 y b^2 + k_3 y^3$$

und hieraus

$$k_3 = 0; \quad k_2 = -\frac{k_1}{b^2}.$$

Setzt man dies ein, so erhalten wir den mit den aufgestellten Bedingungen verträglichen, möglichst einfachen Ausdruck für τ_{xz}

$$\tau_{xz} = k_1 y - \frac{k_1}{b^2} y z^2. \tag{232}$$

Zwischen den Konstanten c_1 und k_1 in (231) und (232) muß aber außerdem noch eine Bedingungsgleichung erfüllt sein, um das Gleichgewicht zwischen den Spannungen an irgend einem Volumenelemente zu sichern. Die erste der Gleichungen (5), durch die die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen der Statik ausgedrückt wurden, lautete

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0.$$

Hier ist sowohl X als σ_x gleich Null zu setzen, denn zum Auftreten einer Normalspannung im Querschnitte der Welle ist kein Anlaß gegeben, wenn neben der Torsion der Welle nicht eine Biegung oder eine achsiale Belastung nebenher läuft. Von einer solchen zusammengesetzten Beanspruchung der Welle sollte aber hier nicht die Rede sein. Beachtet man noch, daß

$\tau_{yx} = \tau_{xy}$ und $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ zu setzen ist, so vereinfacht sich jene Gleichgewichtsbedingung hier zu

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = -\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}.$$

Nach Eintragen der Werte aus den Gl. (231) und (232) geht sie über in

$$-2yz\frac{c_1}{a^2} = 2yz\frac{k_1}{b^2}.$$

Sie wird also in der Tat identisch erfüllt, falls man

$$k_1 = -\frac{c_1 b^2}{a^2} \tag{233}$$

setzt und dies zeigt uns zugleich, daß das in dieser Weise näher bestimmte System der Spannungen vom Gesichtspunkte der Statik starrer Körper aus möglich ist. Eine andere Frage wäre es natürlich, ob dieses Spannungssystem zugleich mit den elastischen Eigenschaften eines bestimmten Materials, z. B. mit dem Hookeschen Gesetze in Übereinstimmung stehe. Auf eine solche Untersuchung haben wir aber hier, in der Absicht zn einem möglichst einfachen, wenn auch nur näherungsweise richtigen Resultate zu gelangen, von vornherein verzichtet. Mit Rücksicht auf Gl. (233) geht jetzt Gl. (232) über in

$$\tau_{xz} = -\frac{c_1 b^2}{a^2}y + \frac{c_1}{a^2}yz^2. \tag{234}$$

Es bleibt jetzt nur noch die Bestimmung der einzigen, bisher unbekannt gebliebenen Konstanten c_1 übrig und man sieht leicht ein, daß diese aus der Momentengleichung, ganz wie früher bei dem elliptischen Querschnitte, berechnet werden kann. Die Momentengleichung lautet

$$M = \int dF(\tau_{xy} \cdot z - \tau_{xz} \cdot y)$$

oder nach Einsetzen der Werte aus (231) und (234)

$$M = c_1 \int \left(z^2 - 2\,\frac{z^2 y^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2}y^2\right) dF.$$

Die rechte Seite zerfällt in drei Glieder, von denen das erste und das letzte ohne weiteres angegeben werden können, da

die Trägheitsmomente des Rechtecks darin auftreten. Das zweite Glied führt auf ein Moment vierten Grades des Querschnittes und muß besonders berechnet werden. Wir dehnen die Integration zunächst auf den im ersten Quadranten liegenden Teil des Querschnittes aus und finden dafür

$$\int y^2 z^2 dF = \int_0^b dz \cdot z^2 \int_0^a y^2 dy = \frac{a^3 b^3}{9}.$$

Für den ganzen Querschnitt liefert das Integral den vierfachen Wert. — Die Momentengleichung geht hiermit über in

$$M = c_1 \left(\frac{4ab^3}{3} - \frac{8ab^3}{9} + \frac{4ab^3}{3} \right) = c_1 \cdot \frac{16ab^3}{9}.$$

Daraus folgt für die Konstante c_1

$$c_1 = \frac{9M}{16ab^3}. \tag{235}$$

Die Spannungskomponenten sind hiermit vollständig bestimmt; wir schreiben dafür

$$\left.\begin{aligned} \tau_{xy} &= \frac{9M}{16ab^3} z \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right) \\ \tau_{xz} &= -\frac{9M}{16a^3b} y \left(1 - \frac{z^2}{b^2}\right) \end{aligned}\right\}. \tag{236}$$

Längs der beiden Symmetrieachsen stehen demnach die Spannungen τ rechtwinklig zu dem vom Ursprunge gezogenen Radiusvektor und sie wachsen proportional mit diesem. Am Umfange sind die Spannungen parallel mit den Umfangsseiten gerichtet und die Spannungsverteilung ist eine parabolische; in den Ecken werden die Spannungen zu Null und sie wachsen von da nach den Mitten der Umfangsseiten hin, wo sie ein Maximum erreichen. Längs einer Diagonale sind die Spannungen überall parallel zur anderen Diagonale gerichtet und das Spannungsverteilungsdiagramm ist eine kubische Parabel. Für einen anderen Radiusvektor, der vom Ursprunge aus gezogen wird, ändert die Spannung τ fortwährend ihre Richtung, wenn man weiter nach außen hin geht.

Es fragt sich jetzt noch, an welcher Stelle τ den absolut größten Wert annimmt.

Am Umfange nimmt, wie wir schon fanden, τ seinen größten Wert in den Mitten der Rechteckseiten an und zwar wird, wenn wir $y = a$ und $z = 0$ setzen,

$$\tau = \frac{9M}{16a^2b}. \tag{237}$$

Den Wert von τ in der Mitte der anderen Rechteckseite erhält man daraus durch Vertauschung von a mit b. Hieraus folgt, daß τ an jener Stelle des Umfanges am größten wird, die dem Mittelpunkte des Rechtecks am nächsten liegt. Dieses Ergebnis stimmt mit jenem überein, das schon für den elliptischen Querschnitt gefunden war. Bei der Anwendung von Gl. (237) zur Berechnung der Beanspruchung einer Welle ist daher unter a die kleinere Rechteckhalbseite zu verstehen.

Führt man an Stelle der halben Rechteckseite die ganzen Seiten $a_1 = 2a$ und $b_1 = 2b$ ein, so geht Gl. (237) über in

$$\tau = \frac{9M}{2a_1^2b_1}. \tag{238}$$

Es bleibt noch zu zeigen, daß τ an keiner Stelle im Innern des Querschnittes einen größeren Wert annehmen kann. Aus den Gleichungen (236) erhält man nach dem Pythagoräischen Satze

$$\tau^2 = \left(\frac{9M}{16a^2b}\right)^2 \cdot \left[\frac{a^2z^2}{b^4}\left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right)^2 + \frac{y^2}{a^2}\left(1 - \frac{z^2}{b^2}\right)^2\right]. \tag{239}$$

Es fragt sich daher, ob der Wert in der eckigen Klammer, der zur Abkürzung mit K bezeichnet sei, irgendwo im Innern gleich oder größer werden kann, als Eins. Da nun im Innern $z < b$ und $y < a$, ferner auch $a < b$ ist, wird jedenfalls

$$K < \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right)^2 + \frac{y^2}{a^2},$$

denn K unterscheidet sich von dem rechtsstehenden Ausdrucke dadurch, daß zu den beiden Gliedern noch Faktoren hinzutreten, die echte Brüche sind. Die Ungleichung läßt sich aber auch schreiben

$$K < 1 - \frac{y^2}{a^2}\left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right),$$

und daraus folgt, daß K ein echter Bruch, daß also τ im Innern nirgends so groß sein kann, wie der in Gl. (237) angegebene Wert am Umfange.*)

§ 60. Berechnung der Torsionsfedern.

Die Mittellinie eines Drahtes besitze im spannungslosen Zustande eine schraubenförmige Gestalt (Abb. 72). Durch zwei Kräfte P, deren Richtungslinien mit der Zylinderachse zusammenfallen, soll die Feder — wie wir den Draht nennen wollen — entweder auseinandergezogen oder zusammengedrückt werden. Dabei stellen sich verschiedene Fragen ein: zunächst will man wissen, wie groß die Belastung P der Feder werden darf, ohne daß die zulässige Beanspruchung des Materials überschritten wird, ferner um wieviel sich die Feder unter der Belastung streckt oder zusammendrückt und im Zusammenhange damit endlich, wieviel Formänderungsarbeit in ihr aufgespeichert werden kann.

P

P

Abb. 72.

Man denke sich die Feder an irgend einer Stelle durchschnitten. Die in diesem Querschnitte übertragenen Spannungen müssen dann im Gleichgewichte mit der an dem zugehörigen Federende angreifenden Kraft P stehen. Bei der Verlegung der Kraft P nach dem Schwerpunkte des Querschnittes tritt ein Kräftepaar auf, dessen Ebene durch den nach diesem Schwerpunkte gezogenen Radius und die Zylinderachse bestimmt ist. Gewöhnlich ist die Steigung der Schraubenlinie nur gering und in diesem Falle, den wir der weiteren Untersuchung zu Grunde legen wollen, steht die Ebene des Kräftepaares nahezu senkrecht zur Schraubenlinie oder der Momentenvektor des Kräftepaares fällt nahezu mit dieser Linie zusammen. Ein solches Kräftepaar bewirkt eine Beanspruchung auf Verdrehung. Denkt man sich das Kräfte-

*) Diesen einfachen Beweis verdanke ich einer freundlichen Mitteilung von Herrn Prof. Wernicke in Braunschweig.

paar in zwei andere zerlegt, von denen die Ebene des einen genau senkrecht steht zur Schraubenlinie, während die des zweiten durch diese Linie hindurchgeht, so wird durch diese zweite Komponente außerdem noch eine Beanspruchung auf Biegung hervorgerufen. Gewöhnlich ist aber diese Biegungsbeanspruchung unerheblich gegenüber der Beanspruchung auf Verdrehen und ich sehe daher davon ab, sie hier zu berechnen, obschon dies leicht auszuführen wäre. Auch die nach dem Schwerpunkte des Querschnittes verlegte Kraft P bringt, für sich genommen, Spannungen hervor und zwar vorwiegend Schubspannungen. Auch diese sind aber, wenn der Halbmesser des Zylinders, auf dem die Schraubenlinie liegt, einigermaßen groß ist gegen die Querschnittsabmessungen des Drahtes, gering gegenüber den Spannungen, die dem Verdrehungsmomente entsprechen. Es genügt daher für die Zwecke, die man mit einer Festigkeitsberechnung verfolgt, vollständig, wenn man nur auf die Hauptbeanspruchung auf Verdrehen achtet.

Bezeichnet man den Zylinderhalbmesser mit r, so kann das Verdrehungsmoment M

$$M = Pr$$

gesetzt werden. Wenn der Querschnitt der Feder ein Kreis vom Halbmesser a ist, folgt für τ nach Gl. (224)

$$\tau = \frac{2Pr}{\pi a^3} \tag{240}$$

und daraus ergibt sich die Tragkraft der Feder. Außer dem kreisförmigen kommt gewöhnlich nur noch der rechteckige Querschnitt in Betracht, für den man nach Gl. (238)

$$\tau = \frac{9Pr}{2a_1{}^2 b_1} \tag{241}$$

erhält, worin a_1 die kleinere und b_1 die größere Rechteckseite bedeuten.

Oft genug ist die Mittellinie der Feder nicht nach einer gewöhnlichen, sondern nach einer Kegelschraubenlinie gekrümmt, z. B. bei den allgemein bekannten Pufferfedern der Eisenbahnwagen. In diesem Falle ist unter r die Entfernung

jenes Querschnittes von der Achse zu verstehen, auf den sich a_1 und b_1 beziehen, oder wenn etwa a_1 und b_1 konstant wären, der größte Wert von r. Sind a_1 und b_1 veränderlich, so muß man τ für verschiedene Querschnitte berechnen und die ungünstigste Stelle aufsuchen. Man kann auch die Aufgabe umkehren und den Querschnitt so verändern, daß die Beanspruchung überall die gleiche bleibt. Dann müßte also z. B., wenn die Dicke a_1 konstant gewählt wird, die Höhe b_1 des rechteckigen Querschnittes der Pufferfeder mit der Entfernung r proportional zunehmen. Diese Andeutungen mögen genügen.

Um die Streckung oder Zusammendrückung zu berechnen, die die Feder unter der Belastung erfährt, müssen wir uns auf die Formel für den Verdrehungswinkel stützen. Diese ist bisher nur für den kreisförmigen Querschnitt abgeleitet worden und ich werde mich daher auch an dieser Stelle auf die Behandlung dieses Falles beschränken. Indessen mache ich darauf aufmerksam, daß bei den nachfolgenden Aufgaben die Berechnung des Verdrehungswinkels für den elliptischen und für den rechteckigen Querschnitt ausgeführt ist und daß man diese Ergebnisse ohne weiteres auf die hier durchzuführende Untersuchung übertragen kann.

Für ein Längenelement ds der Feder (gemessen längs der Schraubenlinie) sei der Verdrehungswinkel $d\Delta\varphi$. Wir wollen uns zunächst vorstellen, daß nur das eine Element ds die Verdrehung $d\Delta\varphi$ erfahre, während alle übrigen Teile der Feder ihre Gestalt ungeändert beibehalten sollen. Denken wir uns dann etwa den unteren Teil der Feder festgehalten, so wird der jenseits ds liegende obere Teil eine Drehung um ds und um den Winkel $d\Delta\varphi$ ausführen. Die Achse des oberen Teils wird dadurch aus ihrer Richtung abgelenkt und der ganze obere Teil steht nun etwas schief. Darauf brauchen wir aber nicht weiter zu achten, denn wenn ein dem ds diametral gegenüber liegendes Element der Feder später ebenfalls die Verdrehung $d\Delta\varphi$ erfährt, stellt sich der obere Teil wieder gerade. Die Achse bleibt daher bei der ganzen Formänderung ohne Ablenkung. Dagegen summieren sich die Verschiebungen

in der Richtung der Achse, die bei den Verdrehungen der einzelnen Elemente ds vorkommen, einfach zueinander und die Summe dieser Verschiebungen ergibt die ganze Streckung, die wir an der belasteten Feder beobachten.

Der mit ds in gleicher Höhe liegende Punkt der Achse des oberen Federteiles beschreibt bei der Verdrehung einen Kreisbogen vom Halbmesser r und dem Zentriwinkel $d\varDelta\varphi$ in einer Richtung, die nahezu mit der Achsenrichtung zusammenfällt. Wir können daher die Verschiebung in der Richtung der Achse gleich

$$r d\varDelta\varphi$$

setzen. Um ebensoviel verschiebt sich auch jeder andere Punkt der Achse des oberen Federteiles in der Richtung der Achse, wie aus Abb. 73 sofort hervorgeht. Darin bedeutet nämlich AA die Achse und in P soll sich das Element ds projizieren, das die Verdrehung $d\varDelta\varphi$ ausführte. Da die Steigung der Schraubenlinie gering, ds also nahezu senkrecht zur Achse sein sollte, projiziert sich ds in Abb. 73 nahezu als Punkt und so ist es daher auch gezeichnet. Ein Punkt B der Achse führt eine Drehung um P aus und der dabei beschriebene Bogen ist gleich $z d\varDelta\varphi$. Die Projektion des Bogens auf die Achse wird daraus durch Multiplikation mit $\cos\psi$, also gleich $z \cdot d\varDelta\varphi \cdot \cos\psi$ gefunden. Mit Rücksicht auf $z\cos\psi = r$ geht dies aber in $r \cdot d\varDelta\varphi$ über, woraus man sieht, daß sich in der Tat alle Punkte der Achse um gleich viel in der Achsenrichtung verschieben.

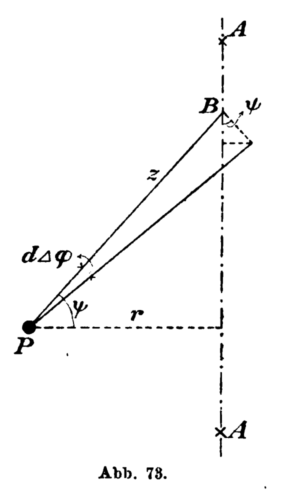


Abb. 73.

Die ganze Streckung oder Zusammendrückung w der Feder ist gleich der über die ganze Länge der Schraubenlinie ausgedehnten Summe dieser Glieder, also

$$w = \int r d\varDelta\varphi .$$

Für $d\Delta\varphi$ schreiben wir nach Gl. (225)

$$d\Delta\varphi = \frac{2 P r d s}{\pi a^4 G}$$

und daher

$$w = \frac{2 P r^2}{\pi a^4 G}\int ds = P\,\frac{4 n r^3}{a^4 G}\,. \tag{242}$$

Unter n ist hier die Zahl der Umläufe zu verstehen, die die Schraubenlinie macht und die Länge eines Umlaufes konnte genau genug gleich dem Umfange eines Kreises vom Radius r genommen werden.

Beachtet man, daß beim Belasten der Feder die Last proportional mit w wächst, so erhält man für die aufgespeicherte Formänderungsarbeit A das halbe Produkt aus der Last und dem zurückgelegten Wege w, also

$$A = P^2\,\frac{2 n r^3}{a^4 G}\,. \tag{243}$$

Aufgaben.

43. Aufgabe, Man soll den Verdrehungswinkel $\Delta\varphi$ für eine Welle von elliptischem Querschnitte berechnen.

Lösung. Das Verdrehungsmoment sei M; dann ist die von den äußeren Kräften zur Verwindung der Welle geleistete Arbeit gleich $\frac{1}{2} M\Delta\varphi$ und ebenso groß muß die Summe der in den einzelnen Volumenelementen aufgespeicherten Arbeiten sein, die nach Gl. (42) berechnet werden können. Man erhält also

$$\tfrac{1}{2} M\Delta\varphi = \int \frac{\tau^2}{2G}\,dv,$$

wenn mit dv ein Volumenelement der Welle bezeichnet wird, das auch gleich $dF\cdot dl$, wo dl ein Element der Länge l der Welle ist, gesetzt werden kann. Die Integration nach l kann sofort ausgeführt werden, da τ für alle Querschnitte an der entsprechenden Stelle gleich groß ist. Für τ^2 setzen wir $\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2$ und für diese beiden Glieder führen wir ihre in § 58, Gl. 227 berechneten Werte ein. So erhalten wir

$$M\Delta\varphi = \frac{l}{G}\int k^2(a^4 z^2 + b^4 y^2)\,dF$$

oder mit Benutzung von k aus Gl. (229)

$$M\varDelta\varphi = \frac{l}{G}\cdot\frac{4M^2}{\pi^2 a^6 b^6}\left\{a^4\int z^2 dF + b^4\int y^2 dF\right\}.$$

Die Integrale in der Klammer sind die Trägheitsmomente der Ellipse. Setzt man diese ein, so wird

$$\varDelta\varphi = \frac{l}{G}\cdot\frac{4M}{\pi^2 a^6 b^6}\left\{\frac{\pi a^5 b^3}{4} + \frac{\pi a^3 b^5}{4}\right\}$$

oder nach entsprechender Vereinfachung

$$\varDelta\varphi = \frac{l M (a^2 + b^2)}{\pi a^3 b^3 G}.$$

Mit $b = a$ liefert dies wieder den schon aus Gl. (225) bekannten Wert des Verdrehungswinkels für die kreisförmige Welle.

Anmerkung. Ebenso kann auch der Verdrehungswinkel für die Welle mit rechteckigem Querschnitte berechnet werden. Führt man τ^2 aus Gl. (239) ein, so wird

$$M\varDelta\varphi = \frac{l}{G}\left[\frac{9M}{16a^3b^3}\right]^2\cdot\int\left\{z^2(a^2-y^2)^2 + y^2(b^2-z^2)^2\right\}dF.$$

Die Ausführung der Integrationen liefert

$$\int z^2(a^2-y^2)^2 dF = \frac{32}{45}a^5b^3; \qquad \int y^2(b^2-z^2)^2 dF = \frac{32}{45}a^3b^5$$

und hiermit

$$\varDelta\varphi = \frac{9}{40}\cdot\frac{l}{G}\cdot\frac{M(a^2+b^2)}{a^3b^3}.$$

Will man mit den ganzen Seiten a_1 und b_1 an Stelle der Halbseiten a und b rechnen, so geht dies über in

$$\varDelta\varphi = 3{,}6\,\frac{l}{G}\cdot\frac{M(a_1^2+b_1^2)}{a_1^3 b_1^3}.$$

Natürlich ist aber auch diese Formel nur als eine Näherungsformel zu betrachten, der keine strenge Gültigkeit zukommt, wie allen Untersuchungen von § 59, auf die sie sich stützt.

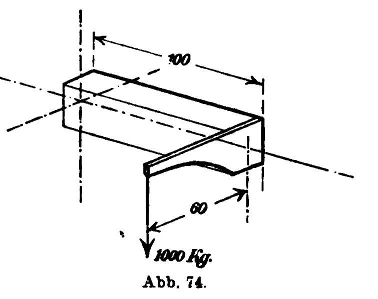


Abb. 74.

44. Aufgabe. Ein Holzbalken mit quadratischem Querschnitte (vgl. Abb. 74) von 20 cm Seite ist am einen Ende in eine Mauer eingelassen und ragt um 100 cm vor. Am freien Ende ist ein horizontaler Arm angeschraubt, der

rechtwinklig zum Balken, also parallel zur Mauerfläche, um 60 cm vorsteht. Am freien Ende dieses Armes ist eine Last von 1000 kg aufgehängt. Wie groß ist die Anstrengung des Holzes?

Lösung. Der Holzbalken wird gleichzeitig auf Biegung und auf Verwindung beansprucht. Das Verdrehungsmoment ist für alle Querschnitte des Balkens gleich groß, nämlich gleich $1000 \times 60 = 60\,000$ cmkg. Das Biegungsmoment ist dagegen am größten am Einspannquerschnitte, wo es sich auf 100 000 cmkg stellt. Dort tritt daher auch die größte Anstrengung des Materiales ein. Wir berechnen zunächst die Biegungsspannungen für sich; dafür erhalten wir

$$\sigma = \frac{6M}{bh^2} = \frac{6 \cdot 100\,000}{20^3} = 75 \text{ atm.}$$

Für die durch das Verdrehungsmoment hervorgerufene größte Schubspannung finden wir nach Gl. (238)

$$\tau = \frac{9M}{2a_1{}^2 b_1} = \frac{9 \cdot 60\,000}{2 \cdot 20^3} = 33{,}75 \text{ atm.}$$

Das größte σ und das größte τ treten an derselben Stelle auf, nämlich in den Mitten der horizontalen Seiten des Einspannquerschnitts. — Außer den jetzt berechneten Spannungen kommen auch noch Schubspannungen vor, die sich wegen der Biegung über den Querschnitt verteilen und deren Resultierende $= P = 1000$ kg ist. Wir sahen aber früher, daß die Schubspannungen im gebogenen Balken am größten in der Nulllinie werden und nach den stärker beanspruchten Querschnittsteilen hin abnehmen. Dort, wo die größte Biegungs- mit der größten Torsionsspannung zusammenfällt, wird die Beanspruchung auf gewöhnliche Scherfestigkeit zu Null und wir brauchen daher in der Tat nur auf die soeben berechneten Werte von σ und τ zu achten.

Nach der gewöhnlichen Annahme, die freilich gerade bei einem so wenig isotropen Körper wie Holz sehr willkürlich ist, wird die Beanspruchung des Materials nach der reduzierten Spannung an der gefährlichsten Stelle bemessen. Nach Gl. (37) finden wir dafür mit $m = \frac{10}{3}$

$$\sigma_{red} = 0{,}35\,\sigma + 0{,}65\sqrt{4\,\tau^2 + \sigma^2},$$

also nach Einsetzen der Zahlenwerte

$$\sigma_{red} = 0{,}35 \cdot 75 + 0{,}65\sqrt{67{,}5^2 + 75^2} = \text{rund } 92 \text{ atm.}$$

45. Aufgabe. Eine Torsionsfeder ist aus 20 mm starkem Rundstahle gefertigt und hat 10 Windungen von 100 mm Radius. Wie groß ist die Tragkraft und die aufgespeicherte Energie, wenn τ gleich 2000 atm gewählt wird?

Lösung. Aus Gl. (240) folgt

$$P = \frac{\pi a^3 \tau}{2 r} = \frac{3{,}14 \cdot 1^3 \cdot 2000}{2 \cdot 10} = 314 \text{ kg}.$$

Für die aufgespeicherte Arbeit liefert Gl. (243), wenn man darin P aus Gl. (240) entnimmt und $G = 900\,000$ atm setzt,

$$A = P^2 \frac{2 \pi n r^3}{a^4 G} = \frac{\pi^2 a^2 r n \tau^2}{2 G} = 4450 \text{ cmkg}.$$

Zehnter Abschnitt.

Die Knickfestigkeit.

---

§ 61. Ableitung der Eulerschen Formel für Stäbe mit Spitzenlagerung.

Zunächst nehme ich an, der Stab, der einer Druckbelastung ausgesetzt werden soll, sei vorher genau gerade gewesen. Es ist freilich nicht möglich, einen Stab vollkommen gerade zu richten und von den kleinen unvermeidlichen Abweichungen von der Geraden hängt das Verhalten des Stabes bei der Beanspruchung auf Zerknicken im Gegensatze zu den anderen Belastungsarten wesentlich ab. Ich werde indessen nachher auf diesen Umstand besonders eingehen und will einstweilen davon absehen. Dagegen soll von vornherein darauf Rücksicht genommen werden, daß es auch nicht möglich ist, die Belastung absolut genau zentrisch aufzubringen, also so, daß die Richtungslinie der beiden Druckkräfte, die an den Enden des Stabes angreifen, genau mit der durch die Querschnittsschwerpunkte gelegten Stabachse zusammenfiele. Immerhin sollen aber die Abweichungen beider Linien voneinander als klein gegenüber den Querschnittsabmessungen angesehen werden; ich setze also mit andern Worten voraus, daß man sich bemüht hatte, die Belastung möglichst genau zentrisch aufzubringen, daß dies aber nicht völlig gelungen ist und daß man daher auch nicht wissen kann, nach welcher Richtung und in welcher Größe Abweichungen vorgekommen sind. Darin unterscheidet sich der Fall der Knickfestigkeit

von dem früher behandelten Falle der gewöhnlichen exzentrischen Druckbelastung.

Für jeden Querschnitt des Stabes kann man sich die Kraft P nach dem Schwerpunkte verlegt denken. Bei dieser Parallelverlegung tritt aber noch ein kleines Kräftepaar auf, das neben der gleichförmig verteilten Druckbelastung noch eine Verteilung von Biegungsspannungen zur Folge hat. Hierdurch wird die vorher gerade Stabachse etwas gekrümmt und die Entfernung zwischen dem Querschnittsschwerpunkte und der Richtungslinie von P vergrößert sich dadurch ein wenig. Bei der gewöhnlichen exzentrischen Druckbelastung braucht man darauf keine Rücksicht zu nehmen, weil dort angenommen wird, daß die Exzentrizität von vornherein verhältnismäßig groß war, so daß die geringe Vergrößerung durch die kleine Ausbiegung des Stabes dagegen nicht in Betracht kommt. Hier aber, wo die ursprüngliche Exzentrizität schon sehr gering war, kann es leicht vorkommen, daß die Änderung, die sie durch die Ausbiegung erfährt, von gleicher Größenordnung mit ihr ist oder sie selbst noch übertrifft.

Der Einfachheit wegen will ich annehmen, daß man durch die Kraftangriffslinie der P und durch die vorher gerade

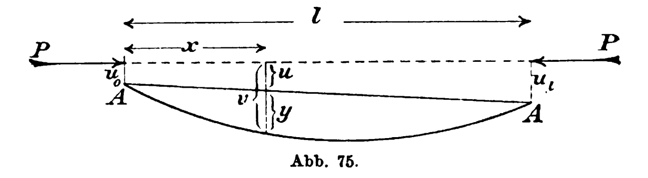


Abb. 75.

Stabachse AA eine Ebene legen kann. Abb. 75 möge dann, freilich in sehr starker Verzerrung, die Lage beider Linien gegeneinander angeben. Die zwischen A und A gezogene krumme Linie gebe die Gestalt an, in die die vorher gerade Stabachse durch die Biegung übergeht. Die ursprüngliche Exzentrizität u des Kraftangriffs im Querschnitte x geht in $u + y$ über und nachdem das Gleichgewicht eingetreten ist, haben wir für das Biegungsmoment M im Querschnitte x

$$M = P(u + y).$$

Die Gleichung der geraden Linie AA lautet

$$u = u_0 \cdot \frac{l - x}{l} + u_l \cdot \frac{x}{l}$$

und für die krumme Linie AA gilt die Differentialgleichung der elastischen Linie

$$E\Theta \frac{d^2 y}{dx^2} = -P(u + y).$$

Setzt man noch

$$v = u + y,$$

so kann diese auch geschrieben werden

$$E\Theta \frac{d^2 v}{dx^2} = -Pv. \tag{244}$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung zweiter Ordnung ist von der Form

$$v = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x, \tag{245}$$

in der A und B die beiden Integrationskonstanten sind, während α, wie man sich durch Einsetzen des angegebenen Ausdrucks in die Differentialgleichung überzeugt,

$$\alpha = \sqrt{\frac{P}{E\Theta}} \tag{246}$$

gewählt werden muß, damit die Differentialgleichung identisch erfüllt wird. Die Integrationskonstanten sind mit Hilfe der Grenzbedingungen zu bestimmen. Für $x = 0$ muß $v = u_0$ und für $x + l$ muß $v = u_l$ werden. Daraus folgt

$$B = u_0 \quad \text{und} \quad A \sin \alpha l + u_0 \cos \alpha l = u_l.$$

Löst man die letzte Gleichung nach A auf und setzt die Werte beider Konstanten in Gl. (245) ein, so geht sie über in

$$v = \frac{\sin \alpha x}{\sin \alpha l}(u_l - u_0 \cos \alpha l) + u_0 \cos \alpha x. \tag{247}$$

Damit ist die Gestalt der elastischen Linie vollständig bekannt. Wir wollen jetzt zusehen, unter welchen Umständen es vorkommen kann, daß v erheblich größer wird, als die ursprüngliche Exzentrizität u. Der in der Gleichung für v vorkommende Klammerwert und das letzte Glied $u_0 \cos \alpha x$ sind immer von derselben Größenordnung wie die u selbst,

da ein Kosinus immer ein echter Bruch ist. Wenn also v viel größer als die u werden soll, kann dies nur dadurch geschehen, daß der Faktor $\frac{\sin \alpha x}{\sin \alpha l}$ vor der Klammer sehr groß wird. Denkt man sich zunächst die Belastung P sehr klein, so daß auch α nach Gl. (246) sehr klein ist, so kann $\sin \alpha x = \alpha x$ und $\sin \alpha l = \alpha l$ gesetzt werden und der Faktor vor der Klammer ist gleich $\frac{x}{l}$, also überall ein echter Bruch. Dies trifft auch so lange jedenfalls noch zu, als der Winkel αl kleiner als ein Rechter, d. h. αl kleiner als $\frac{\pi}{2}$ ist. Sobald aber P und damit α noch weiter wächst, nimmt nun $\sin \alpha l$ wieder ab, während $\sin \alpha x$ z. B. in der Mitte vorläufig noch weiter zunimmt. Zu sehr großen Werten wird der Faktor aber erst dann gelangen können, wenn sich beim weiteren Anwachsen von P der Winkel αl einem Gestreckten, sein Sinus also sich der Null nähert, während $\sin \alpha x$ dann immer noch größere Werte hat und sich für $x = \frac{l}{2}$ sogar dem größten Werte nähert, den ein Sinus annehmen kann. Zuletzt, wenn

$$\alpha l = \pi \tag{248}$$

geworden ist, liefert Gl. (247) sogar einen unendlich großen Wert für v. Natürlich ist dies nur so zu verstehen, daß kurz vorher schon v so groß wird, daß sich der Stab dauernd verbiegt, womit die Gültigkeitsgrenze unserer Betrachtungen überschritten ist. Setzt man α aus Gl. (246) in Gl. (248) ein und löst nach P auf, so erhält man

$$P_E = \pi^2 \frac{E\Theta}{l^2}. \tag{249}$$

Diese Formel wurde zuerst von Euler abgeleitet. Der Wert P_E gibt die kritische Belastung an, die nicht ganz erreicht werden darf, ohne den Stab zum Bruche oder zu einer bleibenden seitlichen Ausbiegung zu bringen.

Von Wichtigkeit ist die Bemerkung, daß die ursprünglichen Exzentrizitäten u in Gl. (249) gar nicht mehr vor-

kommen. So lange die u überhaupt nur klein sind, ist es ganz gleichgültig, wie groß sie nun im einzelnen Falle sind; die kritische Belastung P_E wird davon nicht berührt. Freilich sieht man nach Gl. (247) auch ein, daß je größer die u ursprünglich waren, um so eher jene Ausbiegungen v erreicht werden, die schon vor dem vollständigen Ausknicken zu einer Überanstrengung des Materials führen. Wenn die u klein waren, wird dies aber immer erst kurz vor der Erreichung des kritischen Wertes P_E eintreffen. Vorausgesetzt wird dabei, daß die bloße Druckbelastung an sich (also wenn sich der Stab nicht ausbiegen würde) erheblich unter der Proportionalitätsgrenze liegt, daß also selbst P_E noch kleiner als

$$P_D = F \cdot \sigma_{zul} \tag{250}$$

ist. Es hängt von der Länge l ab, ob dies zutrifft und bei gegebenem Querschnitte wird das Ausknicken um so eher eintreten, je länger der Stab ist. Kurze Stäbe sind daher nur auf einfache Druckbelastung, längere auf Ausknicken zu berechnen. Von welcher Grenze ab die Knickgefahr in Frage kommt, ist durch einen Vergleich der Formeln (249) und (250) leicht zu entscheiden; unter den Aufgaben wird ein solcher Fall erörtert werden.

Anmerkung. Man kann die Knickfestigkeit, sowohl in dem vorausgehenden einfachsten Falle, als in den weiterhin zu behandelnden (oder auch noch verwickelteren) Fällen auch auf graphischem Wege untersuchen, wie Herr Luigi Vianello (Zeitschr. d. V. D. Ing. 1898, S. 1436) gezeigt hat. Das Verfahren schließt sich eng an das in § 46 auseinandergesetzte an. Man nimmt zunächst nach Gutdünken irgend eine Form der elastischen Linie an, von der man erwarten kann, daß sie sich von der tatsächlich zu Stande kommenden nicht allzusehr unterscheidet. Damit werden die Hebelarme der Knicklast und hiermit die Biegungsmomente für diese Form der Ausbiegung bekannt. Man kann dann die zu diesen Biegungsmomenten gehörige elastische Linie nach dem aus der graphischen Statik bekannten Verfahren konstruieren. Der Vergleich mit der zuerst willkürlich angenommenen Form dieser Linie führt zur Lösung der Aufgabe. Sind beide ihrem allgemeinen Verlaufe nach (abgesehen also von dem absoluten Werte der Ausbiegungen) zu weit voneinander verschieden, so

kann man die erste Annahme entsprechend verbessern und die Konstruktion hiermit noch einmal wiederholen. Auf jeden Fall kommt es nachher auf das Verhältnis der absoluten Größe der Ordinaten für die gewählte und für die nach dieser Annahme konstruierte elastische Linie an. Das Verhältnis zwischen beiden liefert die Knicksicherheit, denn man müßte die Last in diesem Verhältnisse vergrößern, um beide zur Deckung zu bringen. Im übrigen verweise ich auf die angegebene Quelle.

§ 62. **Stab mit einer ursprünglichen Krümmung.**

Ich werde jetzt noch zeigen, daß auch eine anfängliche Krümmung des Stabes, wenn der zugehörige Pfeil nur überhaupt klein gegen die Querschnittsabmessungen ist, keinen merklichen Unterschied herbeiführt. Dazu soll jetzt von der Exzentrizität der Kraftangriffslinie abgesehen und vorausgesetzt werden, daß die Stabmittellinie anfänglich eine sehr flache Kurve von dem Pfeile f_0 bildete. Diesen flachen Bogen kann man genau genug als Bogen einer Sinuslinie ansehen, also

$$u = f_0 \sin \pi \frac{x}{l} \tag{251}$$

setzen. Die Differentialgleichung der elastischen Linie lautet wie vorher

$$E\Theta \frac{d^2 y}{dx^2} = -P(u + y)$$

oder nach Einsetzen von u

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{P}{E\Theta}\left(y + f_0 \sin \pi \frac{x}{l}\right). \tag{252}$$

Die schon den Grenzbedingungen ($y = 0$ für $x = 0$ und für $x = l$) angepaßte Lösung dieser Differentialgleichung lautet

$$y = f \sin \pi \frac{x}{l}, \tag{253}$$

wenn mit f zur Abkürzung der Wert

$$f = \frac{f_0}{\pi^2 \frac{E\Theta}{Pl^2} - 1} \tag{254}$$

bezeichnet wird. Die geometrische Bedeutung von f geht aus Gl. (253) ohne weiteres hervor; es ist der größte Wert, den y

annehmen kann und dieser tritt ein, wenn $\frac{\pi x}{l}$ einen rechten Winkel angibt, also für $x = \frac{l}{2}$, d. h. f ist die elastische Ausbiegung nach der Seite hin, die die Mitte des Stabes unter der Belastung P erfährt. Mit Rücksicht auf Gl. (249) kann man f auch in der Form

$$f = \frac{f_0}{\frac{P_E}{P} - 1} \tag{255}$$

schreiben und man erkennt, daß auch in diesem Falle, wenn der ursprüngliche Krümmungspfeil f_0 klein war, eine größere Ausbiegung f, also eine Bruchgefahr durch Ausknicken erst dann eintritt, wenn sich P dem Eulerschen Werte P_E nähert.

Der Winkel, um den sich die Endtangente der elastischen Linie bei der Formänderung dreht, sei mit φ bezeichnet. So lange φ klein ist, kann der Bogen gleich der trigonometrischen Tangente gesetzt werden und man hat daher

$$\varphi = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=0}$$

oder mit Rücksicht auf Gl. (253)

$$\varphi = \pi \frac{f}{l}. \tag{256}$$

Denkt man sich bei einem Knickversuche mit einem Stabe, dessen anfänglicher Krümmungspfeil f_0 einige mm, also merklich mehr beträgt, als die unvermeidliche Exzentrizität der Kraftangriffslinie, die Lasten P als Abszissen und die zugehörigen Biegungspfeile f, die man mit einer geeigneten Vorrichtung gemessen hat, als Ordinaten aufgetragen, so muß man nach Gl. (255) — abgesehen natürlich von unvermeidlichen Versuchsfehlern — eine Hyperbel erhalten. Der Winkel, um den sich die Stabenden drehen, wächst nach Gl. (256) proportional mit f. Wenn man also auch φ mißt, was mit einer Spiegelablesung leicht möglich ist und es in derselben Weise aufträgt, so muß gleichfalls eine Hyperbel entstehen. Die senkrechten Asymptoten beider Hyperbeln entsprechen dem Eulerschen Werte $P = P_E$.

Diese Folgerungen der Theorie habe ich vor einigen Jahren durch den Versuch geprüft und sie gut bestätigt gefunden.

§ 63. Die wirkliche Knickbelastung P_K.

Schon in § 61 ist darauf hingewiesen worden, daß der Stab schon etwas früher, als der Eulersche Wert P_E erreicht ist, zum Bruche oder zu bleibenden Formänderungen gelangt. Wieviel eher dies geschieht, hängt von dem anfänglichen Krümmungspfeile f_0 in Verbindung mit der anfänglichen Exzentrizität der Kraftangriffslinie ab. Um eine ungefähre Vorstellung davon zu geben, wie groß die aus diesem Grunde zu erwartenden Abweichungen sind, führe ich die Rechnung für den Fall durch, daß der Stab anfänglich etwas gekrümmt war, während von einer Berücksichtigung der anfänglichen Exzentrizität abgesehen werden soll, um die Rechnung nicht zu weitläufig zu machen.

Die größte Anstrengung des Materiales tritt im Mittelquerschnitte auf. Man hat dort für irgend eine Belastung P

$$\sigma = \frac{P}{F} \pm \frac{P(f + f_0)}{\Theta} \cdot a,$$

wenn a den Abstand der betreffenden Faser von der zur Nulllinie parallelen Schwerlinie angibt. Für f kann man den Wert aus Gl. (255) einsetzen. Die wirkliche Knickbelastung P_K wird schon dann nahezu erreicht, wenn die größte im Querschnitte vorkommende Spannung σ die Proportionalitätsgrenze überschreitet, denn sobald dies geschehen ist, wachsen die Ausbiegungen schneller als nach den vorausgehenden Formeln und der Bruch wird dadurch alsbald herbeigeführt. Wir erhalten daher P_K durch Auflösung der Gleichung

$$F\sigma' = P + \frac{PaF}{\Theta}\left(f_0 + f_0 \frac{P}{P_E - P}\right)$$

nach P, wenn wir darin unter σ' die Proportionalitätsgrenze des Materiales gegen Druck und unter a den Abstand der äußersten Kante von der Schwerlinie verstehen. Für $F\sigma'$ sei zur Abkürzung wieder P_D geschrieben, also jene Belastung

unter diesem Zeichen verstanden, die bei einfacher Druckbelastung eines kurzen Abschnittes des Stabes zur Überschreitung der Proportionalitätsgrenze führt. Die Gleichung ist vom zweiten Grade für P und ihre Auflösung liefert, wenn wir zur Abkürzung die absolute Zahl

$$\frac{aFf_0}{\Theta} = \eta$$

setzen, für P_K

$$P_K = \frac{P_D + (\eta + 1)P_E}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{P_D + (\eta + 1)P_E}{2}\right)^2 - P_D P_E}. \qquad (257)$$

Von den beiden Werten ist immer der kleinere zu nehmen, das Wurzelvorzeichen also stets so zu wählen, daß das Wurzelglied negativ wird. Mit $f_0 = 0$, also bei einem ursprünglich geraden Stabe, wird $\eta = 0$ und $P_K = P_E$, vorausgesetzt, daß $P_D > P_E$ ist. Sollte dagegen $P_D < P_E$ sein, also bei einem kurzen Stabe, so erhält man nach der Bemerkung über das Wurzelvorzeichen $P_K = P_D$. Auf diese Weise unterscheidet die Formel auch zwischen dem Falle der Knickfestigkeit und der bloßen Druckbelastung. Um eine Vorstellung davon zu geben, wie groß der Unterschied zwischen P_K und P_E werden kann, führe ich folgende Zahlen an.

Der Stab sei ein gleichschenkliges Winkeleisen von 70 mm Schenkellänge und 9 mm Schenkelstärke, der Elastizitätsmodul sei gleich 2 110 000 atm und die Proportionalitätsgrenze gleich 2000 atm. Der anfängliche Krümmungspfeil f_0 sei zu 1 mm angenommen. Dann erhält man für die Länge von 2 m:

$$P_D = 23{,}6\,t, \quad P_E = 11{,}8\,t, \quad P_K = 10{,}4\,t,$$

für die Länge von 3 m:

$$P_D = 23{,}6\,t, \quad P_E = 5{,}2\,t, \quad P_K = 5{,}0\,t,$$

im ersten Falle also schon ziemlich erheblich verschiedene Werte von P_E und P_K. Der Unterschied zwischen beiden wächst schnell, wenn man f_0 vergrößert. Bei dem längeren Stabe ist bei dem gewählten f_0 der Unterschied geringer; man muß aber beachten, daß es um so schwieriger ist, einen Stab hinreichend genau gerade zu richten, je länger er ist.

Unter der Voraussetzung, daß η ein kleiner Bruch ist (daß also f_0 klein ist gegenüber dem Trägheitshalbmesser des Querschnittes), kann man den unter dem Wurzelzeichen in Gl. (257) stehenden Ausdruck mit Vernachlässigung des mit η^2 behafteten Gliedes näherungsweise ersetzen durch

$$\frac{1}{4}\left(P_D^2 + 2(\eta + 1)P_D P_E + (2\eta + 1)P_E^2 - 4P_D P_E\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left((P_D - P_E)^2 + 2\eta P_E(P_D + P_E)\right).$$

Wenn ferner P_D erheblich größer als P_E ist, also bei einem recht schlanken Stabe, kann man genau genug

$$\sqrt{(P_D - P_E)^2 + 2\eta P_E(P_D + P_E)} = P_D - P_E + \eta\,\frac{P_E(P_D + P_E)}{P_D - P_E}$$

setzen und Gl. (257) geht damit näherungsweise über in

$$P_K = P_E - \eta\,\frac{P_E^2}{P_D - P_E}. \tag{258}$$

Diese Gleichung gestattet einen bequemen Überschlag über die ungefähr zu erwartende Abweichung der wirklichen Knickbelastung P_K von dem Eulerschen Werte P_E. Wenn P_D nicht erheblich größer als P_E ist, muß man aber natürlich auf die ursprüngliche Gleichung (257) zurückgehen.

Wie ich schon erwähnte, kann Gl. (257) auch dann angewendet werden, wenn ein eigentliches Ausknicken gar nicht zu erwarten, wenn also P_D kleiner ist als P_E. Der unmittelbaren Anwendung steht aber die Schwierigkeit im Wege, daß man in der Regel im Ungewissen darüber ist, welchen Wert von f_0 oder von η man im gegebenen Falle als den wahrscheinlichsten anzusehen hat. Außerdem ist bei der Ableitung von Gl. (257) auch noch nicht auf die unvermeidliche Exzentrizität des Kraftangriffes Rücksicht genommen. Die Anwendung einer empirischen Formel, die Herr v. Tetmajer aus zahlreichen Versuchen mit Stäben aus verschiedenen Stoffen abgeleitet hat, ist daher in solchen Fällen mehr zu empfehlen. Bezeichnet man den kleinsten Trägheitshalbmesser des Querschnittes mit i, so kann nach v. Tetmajer für $P_D > P_E$

$$P_K = aF - b\frac{lF}{i} \tag{259}$$

gesetzt werden. Die Konstanten a und b sind nach den Versuchen ermittelt und zwar für

Schweißeisen	$a = 3030$ atm,	$b = 12{,}90$ atm.
Weiches Flußeisen . .	$a = 3100$ „	$b = 11{,}40$ „
Härteres Flußeisen . .	$a = 3210$ „	$b = 11{,}60$ „
Lufttrocknes Nadelholz .	$a = 293$ „	$b = 1{,}94$ „

Für Gußeisen reicht Gl. (259) mit zwei Konstanten nicht aus. Für Stäbe mit Längenverhältnissen $\frac{l}{i} = 5$ bis 80 setzt Herr v. Tetmajer nach seinen Versuchen

$$\frac{P_K}{F} = \left(0{,}53\left(\frac{l}{i}\right)^2 - 120\frac{l}{i} + 7760\right)\text{atm.} \tag{260}$$

Für schlankere Stäbe wird die Anwendung der Eulerschen Formel empfohlen. Bei allen diesen Formeln wird vorausgesetzt, daß die Enden um Spitzen drehbar gelagert sind.

§ 64. Stab mit Einspannung an einem oder an beiden Enden.

Wenn das eine Ende des Stabes fest eingespannt und das andere ganz frei beweglich ist, verhält sich der Stab genau so wie eine Hälfte des beiderseits auf Spitzen gelagerten Stabes von der doppelten Länge. Es ist daher nicht nötig, diesen Fall besonders zu untersuchen; man kann vielmehr die früher abgeleiteten Formeln benutzen, wenn man darin nur überall l durch $2l$ ersetzt. Ein etwas allgemeinerer Fall wird unter den Aufgaben behandelt werden.

Anders ist es, wenn der Stab an beiden Enden festgehalten wird und dort als fest eingespannt betrachtet werden kann. Freilich ist es schwer möglich, diese Voraussetzung genau zu verwirklichen, die Anordnung an den Stabenden also so zu treffen, daß in der Tat jede kleine Drehung der Endtangenten der elastischen Linie verhindert wird. Es ist aber immerhin nützlich, sich Rechenschaft darüber zu geben, wie groß die Knicklast in diesem Falle würde, wenn man auch bei der

praktischen Anwendung besser tun wird, auf die genaue Erfüllung der genannten Bedingung nicht zu rechnen, die wirkliche Tragfähigkeit des Stabes also entsprechend niedriger einzuschätzen. Diese Einschätzung muß dem Ermessen des Konstrukteurs im einzelnen Falle überlassen bleiben; sie wird sich in erster Linie nach dem Vertrauen zu richten haben, das man im gegebenen Falle in die Güte der Einspannung setzen kann. Wenn z. B. ein Stab einfach mit stumpfen Enden zwischen die Druckplatten einer Festigkeitsmaschine eingespannt wird, wird man bedenken müssen, daß eine geringe Unebenheit der Endquerschnitte eine Drehung trotzdem ermöglichen kann oder daß sich auch die Druckplatten selbst unter Umständen etwas schief stellen können, wenn sie nicht ganz besonders gut geführt sind. Bei der Ausführung eines Knickversuches dieser Art kann man sich von der Wirksamkeit der Einspannung übrigens leicht dadurch überzeugen, daß man an dem Stabende einen kleinen Spiegel anbringt, auf den man ein Fernrohr richtet, um das Spiegelbild eines festen Maßstabes darin zu beobachten. Bei genauer Einspannung darf sich der Spiegel nicht drehen.*)

Bei der folgenden Rechnung nehme ich indessen an, daß die feste Einspannung genau verwirklicht sei. Die beiden

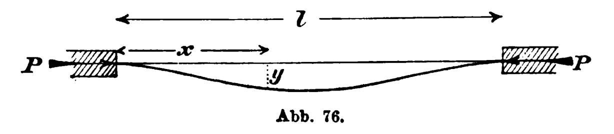


Abb. 76.

Endtangenten der elastischen Linie in Abb. 76 fallen dann miteinander und mit der ursprünglichen Lage der Stabachse

*) Einen Belastungsversuch mit einer großen gußeisernen Säule habe ich auf diese Art ausgeführt. Die Belastung wurde auf $^1/_3$ der zu erwartenden Knicklast gesteigert. Es zeigte sich, daß sich die Stabenden fast um dasselbe Maß drehten, das man bei einer Spitzenlagerung der Enden hätte erwarten können. Dieses Resultat bestätigt von neuem, wie wenig man sich auf die durch eine stumpfe Auflagerung der Kopf- und der Fußplatte bewirkte Einspannung verlassen kann (Mitteilungen meines Laborat., Heft 27).

22*

oder auch mit der Richtungslinie der Kräfte P zusammen, wenn wir jetzt der Einfachheit wegen von der Berücksichtigung der anfänglichen Exzentrizität der Kraftangriffslinie ebenso wie von der ursprünglichen Krümmung des Stabes absehen. Wir wollen untersuchen, bei welchem Werte von P der durch Abb. 76 angegebene Gleichgewichtszustand bestehen kann.

Für den Querschnitt mit der Abszisse x haben wir links vom Schnitte außer der Kraft P noch ein Kräftepaar, das auf das Stabende übertragen werden muß, um eine Drehung zu verhindern. Das Moment dieses Kräftepaares heißt das Einspannmoment oder auch das Anfangsmoment und soll mit M_0 bezeichnet werden. Das Biegungsmoment für den Querschnitt x ist dann

$$M = M_0 + Py \tag{261}$$

und die Gleichung der elastischen Linie liefert

$$E\Theta \frac{d^2 y}{dx^2} = -(M_0 + Py). \tag{262}$$

Das allgemeine Integral dieser Gleichung lautet

$$y = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x - \frac{M_0}{P}, \tag{263}$$

wenn unter α, wie schon früher, zur Abkürzung der Wert

$$\alpha = \sqrt{\frac{P}{E\Theta}}$$

verstanden wird, während A und B die beiden Integrationskonstanten sind. Für $x = 0$ muß y verschwinden, daher ist

$$B = \frac{M_0}{P}$$

zu setzen. Ferner muß wegen der Einspannung der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ sowohl für $x = 0$ als für $x = l$ verschwinden. Man hat

$$\frac{dy}{dx} = A\alpha \cos \alpha x - B\alpha \sin \alpha x,$$

und daher zunächst $A = 0$ und ferner

$$B\alpha \sin \alpha l = 0.$$

In der letzten Gleichung ist sowohl der Faktor B als der Faktor α von Null verschieden, daher muß $\sin \alpha l = 0$ sein. Der Winkel αl ist nicht Null; damit der angenommene Gleichgewichtszustand bestehen kann, muß daher die Last P so weit gesteigert werden, bis $\alpha l = \pi$ oder ein Vielfaches von π geworden ist. Wollte man $\alpha l = \pi$ setzen, so wäre zwar die eine Grenzbedingung erfüllt, aber nicht zugleich die noch ausstehende, daß auch y für $x = l$ verschwinden muß. Diese Lösung würde daher für den von dem vorliegenden verschiedenen Fall passen, daß sich das rechte Ende des Stabes zwar nicht drehen, wohl aber frei in der Richtung der Y-Achse verschieben könnte. Um der letzten Grenzbedingung zu genügen, muß vielmehr auch

$$B \cos \alpha l - \frac{M_0}{P} = 0$$

oder $\cos \alpha l = +1$ sein und nicht gleich -1, wie für $\alpha l = \pi$. Um den zur Untersuchung gestellten Fall zu verwirklichen, müssen wir daher die Last P noch weiter wachsen lassen, bis $\alpha l = 2\pi$ geworden ist. Setzt man in diese Gleichung den Wert von α ein und löst nach P auf, so erhält man

$$P = 4\pi^2 \frac{E\Theta}{l^2}. \tag{264}$$

Der kritische Wert der Belastung ist also bei unwandelbar eingespannten Enden viermal so groß als bei frei drehbaren Enden. Wenn P kleiner ist, kann der angenommene Gleichgewichtszustand nicht bestehen bleiben und der Stab streckt sich, wenn er sich selbst überlassen wird, wieder gerade. Im umgekehrten Falle schreitet dagegen die Biegung immer weiter fort, bis sie zum Zusammenbruche führt.

Natürlich wird durch die anfängliche Exzentrizität des Kraftangriffs u. s. f. der Bruch noch etwas beschleunigt und die darüber in den früheren Paragraphen durchgeführten Betrachtungen lassen sich fast ohne Änderung auf den vorliegenden Fall übertragen; hier ist nur deshalb davon abgesehen worden, um die Untersuchung nicht zu weitläufig zu gestalten.

Endlich sei jetzt noch der Fall untersucht, daß der Stab nur am einen Ende als eingespannt, am anderen aber als frei drehbar befestigt angenommen werden kann. Die Untersuchung ist ganz ähnlich der vorigen. Man muß beachten, daß an dem drehbar befestigten Ende auch eine quer zur Stabachse gerichtete

Abb. 77.

Kraft V übertragen werden muß, um dieses Ende gegen eine Verschiebung im Sinne der y-Achse zu schützen. Für das Biegungsmoment M im Querschnitte x erhält man

$$M = Py - Vx, \tag{265}$$

woraus der Reihe nach folgt

$$E\Theta \frac{d^2 y}{dx^2} = -Py + Vx, \tag{266}$$

$$y = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x + \frac{V}{P} x, \tag{267}$$

wenn α die frühere Bedeutung hat. Wegen $y = 0$ für $x = 0$ folgt $B = 0$ und wegen $y = 0$ für $x = l$

$$A = -\frac{Vl}{P \sin \alpha l}.$$

Damit sind die Integrationskonstanten bestimmt. Dagegen ist V noch unbekannt, während zugleich noch die Grenzbedingung $\frac{dy}{dx} = 0$ für $x = l$ zur Verfügung steht. Mit $B = 0$ hat man durch Differentiieren

$$\frac{dy}{dx} = A\alpha \cos \alpha x + \frac{V}{P},$$

also muß die Gleichung

$$0 = -\frac{V\alpha l \cos \alpha l}{P \sin \alpha l} + \frac{V}{P}$$

erfüllt sein. Die Auflösung nach V würde $V = 0$, hiermit aber auch $A = 0$ und schließlich auch $y = 0$ liefern. Das ist natürlich ein möglicher Gleichgewichtszustand, nämlich jener, bei dem der Stab unter der Belastung geradlinig bleibt. Für diesen interessieren wir uns aber nicht und in der Tat

wird die vorstehende Gleichung bei einem beliebigen Werte von V auch dann noch erfüllt, wenn

$$\frac{\alpha l \cos \alpha l}{\sin \alpha l} = 1 \quad \text{oder} \quad \alpha l = \operatorname{tg} \alpha l$$

ist. Dies ist eine transzendente Gleichung für αl, die unendlich viele Wurzeln hat; für uns kommt aber nur die kleinste auf $\alpha l = 0$ folgende in Betracht, da es sich nur darum handelt, wie weit wir P wachsen lassen müssen, um eine Ausbiegung, wie sie in Abb. 77 gezeichnet ist, eben noch aufrecht erhalten zu können. Man sieht leicht ein, daß αl jedenfalls größer als π werden muß, um die Tangente des Winkels gleich dem Bogen zu machen und durch Probieren findet man, daß ungefähr

$$\alpha l = 4{,}49$$

die gesuchte Wurzel der Gleichung ist. Das Quadrat von 4,49 kann gleich 20 gesetzt werden und mit Rücksicht auf die Bedeutung von α erhält man daher

$$P = 20 \frac{E \Theta}{l^2}, \tag{268}$$

also ziemlich genau das Doppelte der Knickkraft für den Stab mit frei drehbaren Enden oder die Hälfte des für den Stab mit beiderseits eingespannten Enden gefundenen Wertes. Anstatt dessen kann man Gl. (268) auch dahin aussprechen, daß der am einen Ende eingespannte und am anderen drehbar gelagerte Stab dieselbe Knickfestigkeit hat, als wenn er beiderseits drehbar gelagert wäre, falls zugleich an Stelle der Länge l die Länge $\frac{l}{\sqrt{2}}$ genommen wird. Von dieser Zurückführung auf eine gleichwertige Länge des in Spitzen gelagerten Stabes war schon in den Eingangssätzen dieses Paragraphen Gebrauch gemacht und sie ist überhaupt recht bequem. So kann auch Gl. (264) dahin gedeutet werden, daß als gleichwertige Länge $\frac{l}{2}$ genommen werden muß, um den Fall des Stabes mit beiderseits eingespannten Enden auf den Normalfall der Spitzenlagerung zurückzuführen.

§ 65. Knicken bei gleichzeitiger Biegungsbelastung.

Der Stab möge in der Mitte eine Biegungslast Q tragen (vgl. Abb. 78). Für das Biegungsmoment im Querschnitte x erhält man

$$M = \frac{Q}{2}x + Py$$

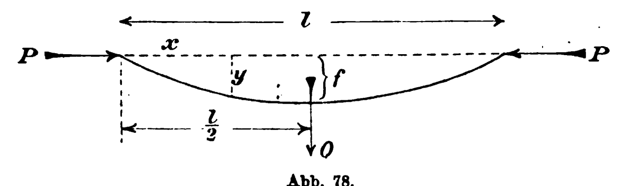


Abb. 78.

und hieraus

$$E\Theta\frac{d^2y}{dx^2} = -\left(\frac{Q}{2}x + Py\right),$$

$$y = A\sin\alpha x + B\cos\alpha x - \frac{Q}{2P}x.$$

Die elastische Linie zerfällt in zwei Äste, die sich in der Mitte aneinander schließen. Für jeden Ast sind die Konstanten A und B gesondert zu bestimmen; hier genügt es indessen der Symmetrie wegen, nur einen Ast näher ins Auge zu fassen. Wir wählen den linken; für $x = 0$ muß $y = 0$ und für $x = \frac{l}{2}$ muß $\frac{dy}{dx} = 0$ sein. Die erste Grenzbedingung liefert $B = 0$ und aus der zweiten folgt

$$A = \frac{Q}{2P\alpha\cos\frac{\alpha l}{2}}.$$

Setzt man dies in die Gleichung für y ein und wählt darin nachträglich $x = \frac{l}{2}$, um die größte Ausweichung, nämlich den Biegungspfeil f zu erhalten, so wird

$$f = \frac{Q}{2P\alpha}\left\{\operatorname{tg}\frac{\alpha l}{2} - \frac{\alpha l}{2}\right\}. \tag{269}$$

Die Formel liefert einen unendlich großen Wert für f, wenn $\frac{\alpha l}{2}$ zu einem rechten Winkel, αl also $= \pi$ und daher $P = \pi^2\frac{E\Theta}{l^2}$ wird. Die Biegungsbelastung ändert also in diesem Sinne nichts

an der kritischen Belastung auf Zerknicken, die ebenso groß bleibt, als wenn Q nicht vorhanden wäre. Dieser Schluß ist aber mit Vorsicht aufzunehmen, denn er bezieht sich ja nur auf die rein elastischen Erscheinungen und nimmt auf die schon vor der Erreichung der kritischen Belastung eintretende Überschreitung der Proportionalitätsgrenze keine Rücksicht. So wie wir schon früher fanden, daß P_K wegen der Exzentrizität des Kraftangriffs u. s. f. kleiner ist als P_E, muß auch hier die wirkliche Knickbelastung kleiner ausfallen als der Eulersche Wert und zwar um so mehr, je größer Q ist.

Für die Spannung in einer Faser des mittleren Querschnittes erhält man bei Benutzung derselben Bezeichnungen wie bei der ähnlichen Untersuchung in § 63

$$\sigma = \frac{P}{F} \pm \left(\frac{Ql}{4} + Pf\right)\frac{a}{\Theta}.$$

In diese Gleichung ist f nach Gl. (269) einzuführen, ebenso für α der Wert einzusetzen und hierauf die Gleichung nach P aufzulösen, womit man ebenso wie in § 63 P_K erhält. Dabei tritt freilich die Schwierigkeit auf, daß die Gleichung transzendent ist; um darüber leichter hinweg zu kommen, ersetze ich Gl. (269) noch durch eine Näherungsformel, indem ich von der Reihenentwicklung

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \cdots$$

Gebrauch mache, die konvergent ist bis $x = \frac{\pi}{2}$. Bei Festigkeitsberechnungen wird es sich meistens um Lasten handeln, die erheblich unter der Bruchbelastung bleiben, da man noch eine gewisse Sicherheit nötig hat. Jedenfalls ist daher auch $\frac{\alpha l}{2}$ bei einem Falle der praktischen Anwendung erheblich kleiner als $\frac{\pi}{2}$ und selbst noch kleiner als die Einheit. In diesem Falle konvergiert die Reihe ziemlich schnell und für eine Annäherung wird es genügen, die drei ersten Glieder zu berücksichtigen. Man erhält dann an Stelle von Gl. (269)

$$f = \frac{Q\alpha^2 l^3}{48P}\left(1 + \frac{\alpha^2 l^2}{10}\right)$$

oder, wenn man noch den Wert von α einsetzt,

$$f = \frac{Ql^3}{48E\Theta}\left(1 + \frac{Pl^2}{10E\Theta}\right). \tag{270}$$

Das erste Glied in der Klammer entspricht dem Biegungspfeile für $P = 0$ und stimmt auch in der Tat mit dem früher

für die Biegungsbelastung Q gefundenen Pfeile (Gl. 82) genau überein. Schreiben wir für diesen Anteil, also auch für den Faktor vor der Klammer f_0 und beachten wir, daß im zweiten Gliede der Faktor 10 im Nenner nahezu mit π^2 übereinstimmt und daß sich dieses Glied daher in der Form $\frac{P}{P_E}$ schreiben läßt, so vereinfacht sich Gl. (270) noch weiter zu

$$f = f_0 \cdot \frac{P_E + P}{P_E}. \tag{271}$$

Die Gleichung für σ geht jetzt, nach Multiplikation mit F und mit $F\sigma = P_D$ über in

$$P_D = P + \left(\frac{Ql}{4} + P \cdot \frac{P_E + P}{P_E} f_0\right)\frac{aF}{\Theta}, \tag{272}$$

die ohne weiteres nach P aufgelöst werden kann und damit P_K liefert. Solange P erheblich kleiner bleibt als P_E, erkennt man übrigens schon aus Gl. (271), daß der Biegungspfeil durch die Zufügung von P gegenüber f_0 nur wenig geändert wird. Daraus ist zu schließen, daß die Biegungsspannungen auch nur ungefähr in demselben Verhältnisse wachsen, wozu dann freilich noch die gleichförmig über den Querschnitt verteilte Belastung $\frac{P}{F}$ kommt.

Nach Auflösung der quadratischen Gleichung (272) nach P hat man übrigens für f_0 nachträglich wieder den Wert einzusetzen, für den es zur Abkürzung diente; von der weiteren Ausrechnung, die gar keine Schwierigkeiten mehr bietet, möge hier abgesehen werden.

Anmerkung. Eng verwandt mit dem hier besprochenen Falle ist ein anderer, der nicht ohne praktische Bedeutung ist und der von Herrn M. Tolle ausführlich behandelt wurde (Zeitschr. d. V. D. Ing. 1897, S. 855). Man denke sich zunächst die Richtung der Kräfte P in Abb. 78 umgekehrt. Von einem Ausknicken kann dann zwar nicht mehr die Rede sein, da die Zugkraft P die durch die Biegungslast Q bewirkte Ausbiegung im Gegenteile zu verkleinern sucht. Dies hindert indessen nicht, daß die allgemeinen Betrachtungen zu Anfang des Paragraphen beibehalten werden können, falls man nur in den Formeln P überall negativ setzt.

Ferner denke man sich den Stab als eine dünne und lange Zugstange, etwa von kreisförmigem Querschnitte, die nur durch ihr Eigengewicht auf Biegung beansprucht wird. Auch dann kann man mit geringen Änderungen die vorausgehenden Entwicklungen benutzen; man braucht nur das durch die Einzellast Q hervorge-

rufene Biegungsmoment durch das von der Eigenlast herrührende zu ersetzen. Schließlich nehme man an, daß die Zugstange an beiden Enden festgehalten ist, so daß die zur Biegungslinie gehörige Bogensehne die unveränderliche Länge l behalten muß. Damit kommt man auf den von Tolle behandelten Fall; die zugehörige Biegungslinie wird von ihm als eine „steife Kettenlinie" bezeichnet. Die Zugkraft P ist jetzt nicht mehr gegeben, sondern aus den Bedingungen der Aufgabe zu ermitteln. Die Lösung findet man natürlich im wesentlichen auf dieselbe Art wie vorher, indem man zuerst die Differentialgleichung der elastischen Linie aufstellt, diese integriert und die Integrationskonstanten den Grenzbedingungen gemäß bestimmt, wobei sich auch der Wert von P ergibt. Man kann aus dieser Betrachtung nützliche Schlüsse über die beste Anordnung solcher Zugstangen ziehen, worüber aber hier nur auf die Quelle verwiesen werden kann.

§ 66. **Knickformel von Navier, Schwarz, Rankine.**

Die Zuverlässigkeit der Eulerschen Theorie der Knickfestigkeit wurde lange Zeit hindurch angezweifelt. Erst nachdem sich bei der Ausführung genauer Versuche in den letzten Jahrzehnten herausgestellt hatte, daß die Eulersche Theorie in sehr guter Übereinstimmung mit dem tatsächlichen Verhalten auf Knicken beanspruchter Stäbe steht, kam sie in allgemeinere Aufnahme in der ausübenden Technik. Vorher behalf man sich mit anderen Formeln, von denen die in der Überschrift genannte am meisten angewendet wurde. Sie wird auch jetzt noch häufig gebraucht und darf daher hier nicht mit Stillschweigen übergangen werden.

Diese Formel ist zu verschiedenen Zeiten auf verschiedenen Wegen gefunden worden und sie wird daher bald als die Naviersche, bald als die Schwarzsche, bald als die Rankinesche bezeichnet. Man geht bei ihrer Ableitung am einfachsten von der an sich ganz berechtigten Annahme aus, daß die Kraft P wegen zufälliger Abweichungen der Stabachse von der geraden Linie und wegen der unvermeidlichen Exzentrizität des Kraftangriffes von vornherein an einem Hebelarme p wirkt. Für diesen Hebelarm setze man hypothetisch

$$p = \varkappa \frac{l^2}{a} \tag{273}$$

worin $\varkappa$ eine absolute Zahl ist, die aus Versuchen zu bestimmen ist. Zur Rechtfertigung für den Ansatz (273) kann man anführen, daß Abweichungen der genannten Art um so eher eintreten, je größer die Länge l im Vergleiche zu dem Abstande a der äußersten Faser von der in Frage kommenden Schwerlinie ist. Freilich ließe sich diese Überlegung auch noch auf andere Art zum Ausdrucke bringen und Gl. (273) haftet daher eine Willkür an, die nur durch die nachträgliche Bestätigung durch die Erfahrung gehoben werden könnte. Nimmt man Gl. (273) aber an, so ist damit der Fall der Knickfestigkeit auf den der gewöhnlichen exzentrischen Druckbelastung zurückgeführt. Für die Spannung an der äußersten Faser erhält man

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{Pp}{\Theta} a = \frac{P}{F}\left(1 + \varkappa \frac{l^2}{i^2}\right), \tag{274}$$

wenn mit i der Trägheitsradius bezeichnet wird.

Der zulässige Wert der Druckbelastung folgt daraus

$$P_{\text{zul}} = \frac{F\sigma_{\text{zul}}}{1 + \varkappa \frac{l^2}{i^2}} \tag{275}$$

und das ist die Formel, um deren Ableitung es sich handelte. Als ein Vorzug dieser Formel darf es betrachtet werden, daß sie die gewöhnliche Druckbeanspruchung für kleine Stablängen l zugleich mit umfaßt. Sie trägt hierbei dem Umstande Rechnung, daß eine zunehmende Exzentrizität des Kraftangriffes bei wachsender Stablänge in der Regel auch dann schon zu erwarten ist, wenn ein Ausknicken überhaupt noch nicht in Frage kommt. Für jene Längenverhältnisse l/i, bei denen die Knickgefahr erst eintritt, stimmt sie dagegen mit den Versuchsergebnissen weniger gut überein, als die Eulersche Formel. Natürlich ist es immer möglich, Gl. (275) zur Übereinstimmung mit irgend einem bestimmten Versuchsergebnisse zu bringen, wenn man die Konstante $\varkappa$ passend wählt. In dieser Hinsicht haben alle Formeln, in die man einen aus den Versuchen selbst erst zu bestimmenden Koeffizienten einführt,

einen Vorsprung vor anderen, die auf rationellerem Wege abgeleitet sind, wie die Eulersche Formel, die schon durch einen einzigen Versuch widerlegt werden könnte, wenn sie auf einer falschen Grundlage beruhte. Es ist auch klar, daß man Gl. (275) ohne Besorgnis auf eine ganze Gruppe verwandter Fälle anwenden kann, wenn man $\varkappa$ aus einem Knickversuche entnimmt, der unter ganz ähnlichen Umständen angestellt wurde. Bei Festigkeitsberechnungen dieser Art handelt es sich ja ohnehin mehr um eine ungefähre Abschätzung, als um die Gewinnung genau richtiger Werte. Eine wissenschaftliche Bedeutung könnte man Gl. (275) aber nur dann zusprechen, wenn die Konstante $\varkappa$ nur von dem Baustoffe abhängig wäre und bei allen Längenverhältnissen des Stabes wirklich als konstant betrachtet werden dürfte. Das trifft aber, wie namentlich aus den Versuchen v. Tetmajers hervorgeht, keineswegs zu. In jedem anderen Falle der Anwendung müßte man, um ganz sicher zu gehen, einen anderen Wert von $\varkappa$ einführen und die Brauchbarkeit des Resultates hängt davon ab, ob man den im gegebenen Falle zutreffenden Wert von $\varkappa$ richtig eingeschätzt hat.

Aufgaben.

46. Aufgabe. Bei welchem Verhältnisse der Querschnittsseite a zur Länge l beginnt die Knickgefahr für einen quadratischen Stab nach der Eulerschen Formel?

Lösung. Man setze

$$\frac{\pi^2 E \Theta}{l^2} = F\sigma$$

und verstehe unter σ die Proportionalitätsgrenze für Druck. Da $\Theta = \frac{a^4}{12}$ und $F = a^2$ ist, erhält man durch Auflösung der Gleichung nach l

$$l = a\pi\sqrt{\frac{E}{12\sigma}}\,.$$

Wenn z. B. für Flußeisen $E = 2\,100\,000$, $\sigma = 2000$ atm gesetzt wird, liefert dies

$$\frac{l}{a} = 29{,}4.$$

Bei der Ableitung ist vorausgesetzt, daß die Stabenden frei drehbar sind. — Bei einem kleineren Längenverhältnisse ist indessen die bloße Berechnung auf gleichförmig verteilte Druckbelastung immer noch bedenklich und man tut dann besser, die Tetmajersche Formel anzuwenden. — Ganz ähnlich ist natürlich bei anderen Querschnittsformen zu verfahren.

47. Aufgabe. Wie groß ist die Last, die eine gußeiserne Säule von 20 cm äußerem Durchmesser und 2 cm Wandstärke bei 6 m Höhe a) nach der Eulerschen, b) nach der Schwarzschen Formel mit Sicherheit tragen kann, wenn $E = 1\,000\,000$ atm, $\sigma_{zul} = 700$ atm, $\varkappa = 0{,}0002$ *gesetzt wird?*

Lösung. Die Querschnittsfläche F ist

$$F = \pi(10^2 - 8^2) = 113 \text{ cm}^2.$$

Der Trägheitsmoment Θ ist

$$\Theta = \frac{\pi}{4}(10^4 - 8^4) = 4630 \text{ cm}^4 \quad \text{und} \quad i^2 = \frac{4630}{113} = 41 \text{ cm}^2.$$

Bei Anwendung der Eulerschen Formel setzen wir voraus, daß das obere Ende der Säule durch das Gebälk, das sie trägt, gegen eine Verschiebung in horizontaler Richtung gestützt sei. Gewöhnlich wird dies zutreffen; natürlich ist aber im gegebenen Falle sorgfältig darüber nachzudenken, ob die Voraussetzung wirklich berechtigt ist. Sonst ist die doppelte Länge in die Formel einzuführen. Dagegen sehen wir von der Berücksichtigung einer etwaigen Einspannung der Enden der Sicherheit wegen ab. Die Knicklast wird dann nach der Eulerschen Formel

$$P_E = \pi^2 \frac{E\Theta}{l^2} = 10 \cdot \frac{10^6 \cdot 4630}{600^2} = 128\,600 \text{ kg}.$$

Man pflegt bei Gußeisen eine sechsfache Sicherheit gegen Ausknicken zu verlangen, daher setzen wir

$$P_{zul} = \tfrac{1}{6} P_E = 21\,400 \text{ kg}.$$

Nach der Schwarzschen Formel wird dagegen

$$P_{zul} = \frac{F \cdot \sigma_{zul}}{1 + \varkappa \frac{l^2}{i^2}} = \frac{113 \cdot 700}{1 + 2 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{600^2}{41}} = 28\,600 \text{ kg}.$$

Ich selbst würde dem ersten Resultate den Vorzug geben, hätte aber auch gegen die Belastung mit 28 600 kg nicht viel einzuwenden, da der Sicherheitsgrad im ersten Falle ziemlich willkürlich eingeschätzt ist.

Anmerkung. Als Beispiel mag hier noch erwähnt werden, daß nach der Münchener Bauordnung für die Berechnung gußeiserner Säulen die Anwendung der Schwarzschen Formel mit den Koeffizienten $\varkappa = 0{,}0006$ und $\sigma_{zul} = 1000$ atm vorgeschrieben ist. Damit würde $P_{zul} = 18\,000$ kg. Sonst werden aber beide Koeffizienten gewöhnlich kleiner angenommen, als nach dieser Vorschrift.

48. Aufgabe. Ein aufrecht stehender Stab ist am unteren Ende fest eingespannt. Das obere Ende ist frei drehbar und kann sich zugleich in horizontaler Richtung etwas verschieben. Dabei soll aber ein elastischer Widerstand auftreten, der der Größe der Ausweichung proportional ist. Man denke sich etwa das obere Ende durch horizontale Zugstangen gehalten, die bei einer Ausweichung des Befestigungspunktes in Spannung geraten. Man soll die Knickfestigkeit des Stabes berechnen.

Lösung. Die Ausweichung des oberen Endes sei y_0 und von diesem Ende aus seien die Abszissen x gerechnet. Dann tritt hier eine horizontale Kraft H auf, die

$$H = c y_0$$

gesetzt werden kann. Der Faktor c hängt von der Elastizität der Zugstangen ab, die das obere Ende halten und ist hier als gegeben zu betrachten. Für den Querschnitt mit der Abszisse x hat man

$$M = Hx + P(y - y_0)$$

und die Gleichung der elastischen Linie lautet

$$E\Theta \frac{d^2 y}{dx^2} = -c y_0 x - Py + P y_0.$$

Die allgemeine Lösung ist

$$y = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x - \frac{c}{P} y_0 x + y_0,$$

wenn α dieselbe Bedeutung wie früher hat. Für $x = 0$ muß $y = y_0$ sein; daraus folgt $B = 0$. Ferner ist für $x = l$ sowohl y als $\frac{dy}{dx}$ gleich Null. Dies liefert die Gleichungen

$$0 = A \sin \alpha l - \frac{c y_0 l}{P} + y_0,$$

$$0 = \alpha A \cos \alpha l - \frac{c y_0}{P}.$$

Löst man beide nach A auf, so erhält man

$$A = y_0 \cdot \frac{cl - P}{P \sin \alpha l}; \qquad A = y_0 \cdot \frac{c}{P\alpha \cos \alpha l}.$$

Damit diese Gleichungen miteinander bestehen können, muß

$$\frac{cl - P}{\sin \alpha l} = \frac{c}{\alpha \cos \alpha l}$$

sein. In anderer Form läßt sich diese Bedingungsgleichung auch schreiben

$$\operatorname{tg} \alpha l = \alpha l - \frac{\alpha P}{c}$$

oder, wenn man P in α ausdrückt,

$$\operatorname{tg} \alpha l = \alpha l - (\alpha l)^3 \cdot \frac{E\Theta}{c l^3}.$$

Die kleinste Wurzel dieser transzendenten Gleichung, die im einzelnen Falle durch Probieren aufzulösen ist, liefert αl und hiermit die Knicklast P.

Setzt man $c = \infty$, so ist der Stab oben ganz festgehalten und wir kommen damit auf den schon in § 64 ausführlich behandelten Fall. Wenn umgekehrt $c = 0$ gesetzt wird, ist das obere Stabende in horizontaler Richtung frei beweglich und die Gleichung geht über in $\operatorname{tg} \alpha l = \pm \infty$. Diese liefert die Lösung $\alpha l = \frac{\pi}{2}$ und daher

$$P = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{E\Theta}{l^2},$$

wie auch schon in den Eingangssätzen von § 64 durch eine einfache Betrachtung festgestellt worden war.

49. Aufgabe. Der Querschnitt eines Stabes, der an beiden Enden in Spitzen gelagert ist, sei in der Stabmitte auf eine Strecke l', die klein gegenüber der ganzen Stablänge ist, durch Einschnitte verschwächt, so daß das kleinste Trägheitsmoment des Querschnittes dadurch von Θ auf Θ' herabgesetzt wird. Man soll die Knickfestigkeit des verschwächten Stabes mit der des unverschwächten vergleichen.

Lösung. Der Winkel, um den sich die Endquerschnitte des kurzen mittleren Stückes bei gegebenem Biegungsmomente gegeneinander verdrehen, ist in dem Verhältnisse $\frac{\Theta}{\Theta'}$ größer, als wenn der Querschnitt unverändert durchginge. Man denke sich nun einen zweiten Stab von überall gleichem Trägheitsmomente Θ, aber von etwas größerer Länge, so nämlich, daß das Mittelstück von der Länge l' durch ein solches von der Länge $l' + l''$ ersetzt ist, wenn

$$l'' = \frac{\Theta - \Theta'}{\Theta'} l'$$

genommen wird. Dann würden sich die Endquerschnitte des Mittel-

stückes dieses Stabes bei gegebenem Biegungsmomente um denselben Winkel gegeneinander verdrehen, wie beim verschwächten Stabe. Falls nun das Mittelstück an und für sich kurz ist, wird auch der Biegungspfeil in der Mitte beim zweiten Falle nicht merklich größer sein als im ersten Falle, wenn die Biegungslinien in den äußeren Stababschnitten in beiden Fällen miteinander übereinstimmen. Man erkennt daraus, daß die Querschnittsverschwächung in der Mitte so wirkt, als wenn der Querschnitt unverändert geblieben, die Stablänge aber um den vorher berechneten Betrag l'' vergrößert wäre. Danach kann die Knicklast leicht berechnet werden.

Zur Prüfung des hier erörterten Falles habe ich eine größere Versuchsreihe angestellt, und durch die Versuchsergebnisse wurde ich erst zu der hier gegebenen Lösung geführt. Dabei zeigte sich indessen, wie auch von vornherein zu erwarten war, daß man für l' einen etwas größeren Wert als die Länge einzusetzen hat, auf die sich die Verschwächung des Stabquerschnittes erstreckt. Auch in den unmittelbar an das Mittelstück angrenzenden Teilen des Stabes kann sich nämlich nicht sofort der volle Querschnitt wirksam erweisen; die an die Lücke angrenzenden Kanten müssen vielmehr ebenfalls zunächst noch spannungslos sein. Bei meinen Versuchen zerknickte ich Winkeleisen, bei denen der Querschnitt durch beiderseitige Einschnitte von 2,5 bis 60 mm Länge (in der Richtung der Stabachse gemessen) so geschwächt war, daß Θ' nur $^1/_4$ bis $^1/_5$ von Θ war. Dabei mußte man die Einschnittlänge um 2 bis 4 cm vermehren, um die vorausgehende Rechnung in Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen zu bringen.

Elfter Abschnitt.

Grundzüge der mathematischen Elastizitätstheorie.

---

§ 67. Ableitung der Grundgleichungen.

Zwischen den Spannungskomponenten an irgend einer Stelle des Körpers bestehen nach den allgemeinen und jedenfalls streng richtigen Lehren der Statik zunächst nur die im ersten Abschnitte abgeleiteten Gleichungen (4) und (5). Durch die Gleichungen (4) werden die neun Spannungskomponenten auf sechs zurückgeführt und diese sind dann nur noch durch die drei Gleichungen (5) miteinander verbunden. Aus drei Gleichungen kann man aber sechs unbekannte Größen unter keinen Umständen eindeutig bestimmen; die Aufgabe, die Spannungsverteilung zu ermitteln, ist daher, wie wir schon früher geschlossen haben, statisch unbestimmt, so lange keine weiteren Angaben hinzutreten. Diese Unbestimmtheit zu heben, haben wir in den vorausgehenden Abschnitten verschiedene Hypothesen zu Grunde gelegt, die nur durch Berufung auf die Übereinstimmung der aus ihnen gezogenen Folgerungen mit der Erfahrung gerechtfertigt werden konnten. Wenn nun auch ein solches Verfahren den Ansprüchen, die man vom Standpunkte der praktischen Anwendung an die technische Mechanik stellen kann, ganz wohl genügt, so befriedigt es doch nach anderer Richtung nicht vollständig. Unser Erkenntnisdrang verlangt eine Zurückführung der zusammengesetzteren Erscheinungen auf die einfachsten und möglichst einwandfrei feststellbaren Erfahrungstatsachen. Diesem Verlangen sucht

die mathematische Theorie der Elastizität zu entsprechen. Sie stellt sich die Aufgabe, die Formänderung und den Spannungszustand eines von gegebenen äußeren Kräften beanspruchten elastischen Körpers ohne Zuhilfenahme besonderer Hypothesen zu berechnen, indem sie sich dabei außer auf die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen nur noch auf das Elastizitätsgesetz stützt. Für verschiedene Körper ist nun freilich, wie im zweiten Abschnitte auseinandergesetzt wurde, das Elastizitätsgesetz oder der Zusammenhang zwischen den Spannungskomponenten und den Formänderungen von verschiedener Gestalt und im allgemeinen auch noch keineswegs genau bekannt. Viele der für die praktische Anwendung wichtigsten Stoffe befolgen indessen das Hookesche Gesetz und auf diese allein beziehen sich die Entwicklungen der mathematischen Elastizitätstheorie, soweit sie bis heute abgeleitet wurden, in aller Strenge.

Daß es überhaupt möglich ist, die gestellte Aufgabe zu lösen, ergibt sich aus folgender Betrachtung. Die elastischen Verschiebungen, die ein Punkt des Körpers mit den Koordinaten x, y, z unter dem Einflusse der Belastung erfährt, seien für die Richtungen der Koordinatenachsen mit ξ, η, ζ bezeichnet. Da es nicht auf die Bewegungen ankommt, die der Körper etwa als Ganzes erfährt, sondern nur auf die relativen Verschiebungen einzelner Teile des Körpers gegeneinander, wird es sich empfehlen, das Koordinatensystem, auf das die x, y, z und die ξ, η, ζ bezogen sind, auf dem Körper selbst festzulegen, also etwa so, daß der Ursprung stets mit einem beliebig ausgewählten Punkte des Körpers zusammenfällt, die X-Achse stets durch einen zweiten und die XY-Ebene durch einen dritten Punkt des Körpers geht. Wenn sich der Körper ohne Formänderung nur als Ganzes bewegt, bleiben dann ξ, η, ζ in jeder Lage gleich Null; die drei Größen sind also bei diesen näheren Festsetzungen sehr geeignet, die elastische Formänderung zu beschreiben. Gewöhnlich ist es am bequemsten, den zweiten und dritten der vorher angeführten drei Punkte, die nicht in einer Geraden liegen dürfen, deren Auswahl aber sonst beliebig getroffen werden kann, unendlich nahe bei dem ersten anzu-

nehmen. Nach dem Elastizitätsgesetze sind die Spannungskomponenten von den Formänderungen an der betreffenden Stelle des Körpers abhängig. Wenn ξ, η, ζ als Funktionen von x, y, z bekannt und hiermit die elastische Formänderung, die der Körper erfährt, in allen Einzelheiten gegeben wäre, könnte man nach dem Elastizitätsgesetze auch die Spannungskomponenten an jeder Stelle des Körpers angeben. Jedenfalls ist es also möglich, alle Spannungskomponenten in den drei unbekannten Verschiebungskomponenten ξ, η, ζ auszudrücken. Damit werden aber die sechs unbekannten Größen des Problems auf drei zurückgeführt, zu deren Ermittelung die durch die drei Gleichungen (5) ausgesprochenen Gleichgewichtsbedingungen im Zusammenhange mit den Grenzbedingungen an der Oberfläche des Körpers gerade hinreichen.

In einem Falle haben wir von diesem Verfahren schon Gebrauch gemacht, nämlich bei der Untersuchung der dickwandigen Röhren in § 56. In der Tat handelte es sich dort nur um einen besonders einfachen Fall, der nach den Methoden der mathematischen Elastizitätstheorie, ohne daß von diesen bis dahin die Rede war, sofort vollständig gelöst werden konnte. Dasselbe Verfahren ist jetzt ganz allgemein auszuarbeiten und wer sich mit jener früheren Untersuchung hinreichend vertraut gemacht hat, wird nun mit geringer Mühe den Erweiterungen der dort durchgeführten Betrachtung, um die es sich hier handelt, folgen können. Darin besteht ja überhaupt der große Vorzug des Ganges von den einfacheren Erscheinungen zu den verwickelteren, daß man von vornherein ein ungefähres Bild davon besitzt, was man zu erwarten hat und nahezu erraten kann, welche Wege der Vortrag einschlagen wird. Deshalb habe ich diese allgemeineren Betrachtungen an das Ende meiner Vorlesungen, und nicht, wie es in den von den Mathematikern ausgearbeiteten Lehrbüchern zu geschehen pflegt, an den Anfang gestellt. Darin würde nur eine nutzlose, dem Verständnisse der Sache aber sehr gefährliche Erschwerung liegen.

Die elastischen Verschiebungen ξ, η, ζ sollen als sehr klein

im Vergleiche zu den Abmessungen des Körpers im natürlichen Zustande, also gegenüber den Koordinaten x, y, z, betrachtet werden, wie es ja den tatsächlichen Verhältnissen gewöhnlich entspricht. Wir wollen zunächst die bezogenen Dehnungen ε_x, ε_y, ε_z in den Richtungen der Koordinatenachsen ausdrücken. Zu diesem Zwecke betrachten wir zwei Punkte, die ursprünglich um dx auseinander lagen. Die Koordinaten dieser beiden Punkte im natürlichen Zustande sollen also

$$x, y, z \quad \text{und} \quad x + dx, y, z$$

gewesen sein. Nach der Formänderung gehen sie über in

$$x + \xi, \; y + \eta, \; z + \zeta$$

und

$$x + dx + \xi + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx, \quad y + \eta + \frac{\partial \eta}{\partial x} dx, \quad z + \zeta + \frac{\partial \zeta}{\partial x} dx,$$

wobei darauf zu achten war, daß sich ξ, η, ζ um die angegebenen Differentiale ändern, wenn man zum Nachbarpunkte weiter rückt.

Aus der Strecke dx ist also durch die Formänderung die Strecke $dx + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx$ geworden. Unter Benutzung unserer früheren Schreibweise haben wir also für die elastische Änderung Δdx der Strecke dx

$$\Delta dx = \frac{\partial \xi}{\partial x} dx.$$

Die bezogene Dehnung ε_x ist aber das Verhältnis zwischen Δdx und der ursprünglichen Länge dx, also finden wir die erste der drei folgenden Gleichungen

$$\varepsilon_x = \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial \zeta}{\partial z}. \tag{276}$$

Die beiden anderen folgen auf demselben Wege, wenn man die Schicksale einer in der Richtung der Y-Achse gezogenen Strecke dy oder einer in der Richtung der Z-Achse gezogenen Strecke dz verfolgt.

Eine ganz ähnliche Betrachtung liefert uns auch den Ausdruck für die kleine elastische Änderung γ_{xy}, die der ursprünglich rechte Winkel zwischen zwei Strecken dx und dy erfährt, die von dem Punkte xyz in den Richtungen der

X- und der Y-Achse gezogen wurden. Um die Größe dieses Winkels nach der Formänderung mit der ursprünglichen zu vergleichen, denke ich mir den einen Winkel parallel verschoben, so daß beide Scheitel zusammenfallen. So sind sie in Abb. 79 gezeichnet. Wir brauchen dabei nur auf die kleinen Abweichungen jedes Schenkels in der Richtung des anderen Schenkels zu achten, denn wenn auch ein Schenkel in einer Richtung senkrecht zur Ebene der Abb. 79 ein wenig abgelenkt wird, so trägt dies zur Winkeländerung nichts bei; eine solche Ablenkung, die etwa der in der Richtung der X-Achse verlaufende Schenkel erfährt, kommt nämlich auf eine Drehung des Winkels um die Y-Achse hinaus, die zu keiner Änderung der Größe des Winkels führt. Auch die Dehnung in der Richtung der X-Achse kann keinen Beitrag zur Winkeländerung γ_{xy} liefern. Wir brauchen also nur darauf zu achten, daß sich der Endpunkt der Strecke dx relativ zum Anfangspunkte um eine kleine Strecke in der Richtung der Y-Achse verschoben hat, die wir schon vorher zu $\frac{\partial \eta}{\partial x} dx$ berechnet haben und daß sich ebenso der Endpunkt von dy um $\frac{\partial \xi}{\partial y} dy$ gegen den Winkelscheitel in der Richtung der X-Achse verschoben hat. Die Beträge beider Ablenkungen sind in Abb. 79 eingeschrieben. Zugleich sehen wir noch, daß der ursprünglich rechte Winkel in einen spitzen übergeht, wenn beide Differentialquotienten positiv sind.

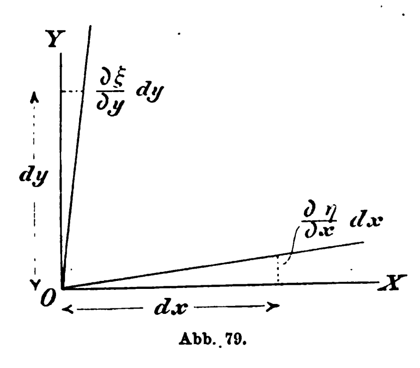


Abb. 79.

Die Richtungsänderungen sind sehr klein; wir können daher die zugehörigen Winkel in Bogenmaß gleich ihren trigonometrischen Tangenten setzen. Die Richtungsänderung von dx trägt daher $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ zu γ_{xy} bei und ähnlich ist es mit dy. Im ganzen haben wir daher

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

und diese Formel ist als streng richtig zu betrachten, falls ξ, η, ζ unendlich klein gegenüber x, y, z sind. Diese Voraussetzung trifft nun freilich bei der wirklichen Formänderung eines elastischen Körpers nicht absolut genau zu; sie ist aber in der Regel immerhin nahezu erfüllt und man sieht ein, daß ein Fehler, der etwa hieraus entspringen könnte, gewöhnlich gar nicht in Betracht kommen wird. — Natürlich läßt sich dieselbe Betrachtung auch für die Winkeländerungen zwischen den Richtungen von dx und dz und von dy und dz wiederholen. Es ist aber gar nicht nötig, dies wirklich auszuführen, da keine Koordinatenrichtung vor der anderen etwas voraus hat, so daß sich das vorige Resultat ohne weiteres auch auf γ_{xz} und γ_{yz} übertragen läßt. Mit Wiederholung der vorigen Formel haben wir daher den Gleichungssatz

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}; \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}. \qquad (277)$$

Außerdem soll noch die bezogene Volumenänderung berechnet werden, die der Körper an der betrachteten Stelle erfährt. Man denke sich ein rechtwinkliges Parallelepiped von den Kantenlängen dx, dy, dz. Mit diesem denken wir uns zuerst die Winkeländerungen γ_{xy} u. s. f. zwischen den Kanten vorgenommen. Wenn γ_{xy} endliche Größen wären, würde dadurch das Volumen geändert. So würde z. B. die Rechteckfläche $dx \cdot dy$ in ein Parallelogramm von der Fläche

$$dx \cdot dy \cdot \cos \gamma_{xy}$$

übergehen. Wenn γ_{xy} klein von der ersten Ordnung ist, weicht aber der Kosinus dieses Winkels nur um eine Größe zweiter Ordnung von der Einheit ab. Die Änderung des Volumens durch diese Richtungsänderungen kann daher vernachlässigt werden; streng ist dies freilich auch wieder nur dann zulässig, wenn ξ, η, ζ wirklich unendlich klein sind.

Hierauf sollen die Kantenlängen um Δdx u. s. f. geändert werden. Dadurch tritt eine Änderung des Volumens ein, die

im Vergleiche zum ursprünglichen Volumen nur von der ersten Ordnung klein ist. Diese Änderung kommt daher allein in Betracht. Das Volumen nach der Streckung der Kanten ist

$$dx(1+\varepsilon_x)dy(1+\varepsilon_y)dz(1+\varepsilon_z)$$

oder, wenn wir ausmultiplizieren und die kleinen Größen höherer Ordnung fortlassen

$$dx\,dy\,dz(1+\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z).$$

Als bezogene Volumenänderung e bezeichnen wir das Verhältnis zwischen der Änderung des Volumens und dem ursprünglichen Volumen und wir haben daher

$$e=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z$$

oder nach den Gl. (276)

$$e=\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial \zeta}{\partial z}. \tag{278}$$

Nach diesen Vorbereitungen können wir jetzt auch die Spannungskomponenten in ξ, η, ζ ausdrücken. Am einfachsten gelingt dies mit den Schubspannungen, denn nach Gl. (12), die wegen des Superpositionsgesetzes ohne weiteres auf unseren Fall übertragen werden kann, ist z. B.

$$\gamma_{xy}=\frac{\tau_{xy}}{G}$$

und mit Rücksicht auf die Gl. (277) erhalten wir daher

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}=G\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial \eta}{\partial x}\right);\quad \tau_{xz}=\tau_{zx}=G\left(\frac{\partial \xi}{\partial z}+\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right);$$
$$\tau_{yz}=\tau_{zy}=G\left(\frac{\partial \eta}{\partial z}+\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right). \tag{279}$$

Nach dem Hookeschen Elastizitätsgesetze bestehen zwischen den Dehnungen und den Normalspannungen die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} E\varepsilon_x &= \sigma_x-\frac{1}{m}(\sigma_y+\sigma_z)\\ E\varepsilon_y &= \sigma_y-\frac{1}{m}(\sigma_x+\sigma_z)\\ E\varepsilon_z &= \sigma_z-\frac{1}{m}(\sigma_x+\sigma_y)\end{aligned}\right\}. \tag{280}$$

Wenn wir sie addieren und für die Summe der bezogenen Dehnungen die bezogene Volumenänderung e einführen, erhalten wir daraus

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \frac{m}{m-2} Ee. \tag{281}$$

Die erste der vorausgehenden Gleichungen läßt sich aber schreiben

$$E\varepsilon_x = \frac{m+1}{m}\sigma_x - \frac{1}{m}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{m+1}{m}\sigma_x - \frac{Ee}{m-2}$$

und deren Auflösung nach σ_x liefert

$$\sigma_x = \frac{mE}{m+1}\left(\varepsilon_x + \frac{e}{m-2}\right). \tag{282}$$

Man kann diesen Ausdruck noch etwas vereinfachen, wenn man sich erinnert, daß nach Gl. (32)

$$G = \frac{mE}{2(m+1)}$$

gesetzt werden kann. — Die Gl. (280) waren für σ_x, σ_y, σ_z ganz symmetrisch gebaut; wir können daher die Lösung (282) ohne weitere Bemühungen sofort auch auf die beiden anderen Unbekannten σ_y und σ_z übertragen. Mit Benutzung der angeführten Vereinfachung und mit Rücksicht auf die Gl. (276) erhalten wir daher die Ausdrücke für die Normalspannungskomponenten

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= 2G\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{e}{m-2}\right) \\ \sigma_y &= 2G\left(\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{e}{m-2}\right) \\ \sigma_z &= 2G\left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{e}{m-2}\right) \end{aligned}\right\}. \tag{283}$$

Damit ist die Aufgabe, die wir uns zunächst gestellt hatten, gelöst. Wir haben jetzt die unbekannten Spannungskomponenten auf nur noch drei unbekannte Größen ξ, η, ζ zurückgeführt und es bleibt uns nur noch übrig, diese Ausdrücke in die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen, die durch die Gl. (5) ausgesprochen werden, einzusetzen.

Die Gl. (5) lauteten

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + Z = 0.$$

Durch Einsetzen der durch die Gl. (279) und (283) gegebenen Werte geht die erste von ihnen über in

$$2G\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{1}{m-2} \cdot \frac{\partial e}{\partial x}\right) + G\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}\right) + G\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial z}\right) + X = 0.$$

Um diese auf eine übersichtlichere Form zu bringen, nehmen wir noch einige kleine Änderungen mit ihr vor. Zunächst erhält man durch Division mit G und etwas geänderte Zusammenfassung der einzelnen Glieder

$$\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial z}\right) + \frac{2}{m-2} \cdot \frac{\partial e}{\partial x} + \frac{X}{G} = 0.$$

Für die drei in der ersten Klammer zusammengefaßten Glieder benutzen wir eine in der mathematischen Physik sehr häufig gebrauchte Bezeichnung. Es macht sich nämlich fast in allen physikalischen Theorien nötig, von den unbekannten Funktionen, die in ihnen auftreten, die Summe der drei zweiten Differentialquotienten nach den drei Achsenrichtungen zu nehmen. Zuerst geschah dies in der Potentialtheorie von Laplace. Man bezeichnet daher die Rechenvorschrift, die Summe dieser drei zweiten Differentialquotienten nach den Achsenrichtungen zu bilden, als die Laplacesche Operation. Um diese Rechenvorschrift anzugeben, setzen wir vor die Funktion, auf die sie Anwendung finden soll, das Zeichen ∇^2. Oft wird dafür auch nur einfach Δ geschrieben; wegen des Zusammenhanges mit anderen Lehren, auf die es hier nicht weiter ankommt, entscheide ich mich aber für das zuerst genannte

Zeichen. Um kurz anzudeuten, was ich eben ausführlicher auseinandersetzte, kann man

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{284}$$

schreiben. Natürlich ist dies in solcher Form noch keine Gleichung im eigentlichen Sinne; man hat vielmehr in Gedanken überall hinter die Operationszeichen die Veränderlichen zu setzen, auf die sich die Operationen beziehen sollen.

Ich komme jetzt zu den in der zweiten Klammer zusammengefaßten Gliedern der vorausgehenden Gleichung. Jedes dieser Glieder ist ein Differentialquotient nach x und ihre Summe kann daher gleich

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\right) \text{ oder gleich } \frac{\partial e}{\partial x}$$

gesetzt werden. Diese Summe kann daher mit dem nächstfolgenden Gliede der Gleichung zusammengefaßt werden. Hiermit nimmt die Gleichung, die die Gleichgewichtsbedingung zwischen den Spannungen gegen ein Verschieben nach der X-Richtung ausspricht, die übersichtlichere Form an

$$\left.\begin{aligned}
\nabla^2 \xi + \frac{m}{m-2} \cdot \frac{\partial e}{\partial x} + \frac{X}{G} &= 0,\\
\nabla^2 \eta + \frac{m}{m-2} \cdot \frac{\partial e}{\partial y} + \frac{Y}{G} &= 0,\\
\nabla^2 \zeta + \frac{m}{m-2} \cdot \frac{\partial e}{\partial z} + \frac{Z}{G} &= 0.
\end{aligned}\right\} \tag{285}$$

Ich habe sofort die für die beiden anderen Koordinatenrichtungen geltenden Gleichungen hinzugefügt, die genau auf dieselbe Weise gefunden werden wie die erste.

Die Gl. (285) bilden die Ausgangsgleichungen für alle ferneren Untersuchungen der mathematischen Elastizitätstheorie. Ich möchte noch einmal betonen, daß sie nichts anderes sind, als die Gleichgewichtsbedingungen gegen Verschieben, die früher in den Gl. (5) ihren Ausdruck gefunden hatten. In der neuen Form sieht man den Gl. (285) ihre physikalische Bedeutung nicht so leicht an; es ist aber durchaus nötig, daß man sich diesen Sinn der Gleichungen stets vor Augen hält und es ist

daher sehr anzuraten, daß man sich die vorausgegangene Ableitung so lange genau im einzelnen überlegt, bis man nicht mehr darüber im Zweifel sein kann.

Schließlich bemerke ich noch, daß man die drei Komponentengleichungen (285) auch zu einer einzigen Gleichung zwischen gerichteten Größen zusammenfassen kann, deren physikalische Bedeutung dann darauf hinausläuft, daß die geometrische Summe aller an dem Umfange eines Körperelementes auftretenden Spannungen gleich Null sein muß. Wird nämlich die Verschiebung des Punktes xyz der Größe und Richtung nach mit $\mathfrak{v}$ bezeichnet, so also, daß ξ, η, ζ die Komponenten von $\mathfrak{v}$ sind, ferner die äußere Kraft mit $\mathfrak{P}$, so gehen die Gl. (294) über in

$$\nabla^2 \mathfrak{v} + \frac{m}{m-2} \nabla e + \frac{\mathfrak{P}}{G} = 0. \tag{286}$$

Ich mache von dieser Form in der Folge nicht Gebrauch und will mich daher nicht damit aufhalten, die Bedeutung des Zeichens ∇ noch näher, als schon aus dem Zusammenhange hervorgeht, zu erklären. In der Dynamik wird dies geschehen. Auch nur ganz gelegentlich erwähne ich für Leser, die schon näher mit der mathematischen Physik auf anderen Gebieten (namentlich mit der Elektrizitätslehre) vertraut sind, daß Gl. (286) auch noch

$$\nabla^2 \mathfrak{v} + \frac{m}{m-2} \nabla \operatorname{div} \mathfrak{v} + \frac{\mathfrak{P}}{G} = 0 \tag{287}$$

geschrieben werden kann. Obschon ich übrigens in diesem Bande von dem Rechnen mit gerichteten Größen keinen Gebrauch gemacht habe, wird man doch schon bei einem einfachen Vergleiche der Gl. (286) oder (287) mit (285) begreiflich finden, daß es Leute gibt — zu denen ich gehöre — die es als einen Fortschritt der Theorie betrachten, wenn mit den gerichteten Größen unmittelbar gerechnet wird, anstatt daß man jede einzelne Tatsache durch drei verschiedene Gleichungen zum Ausdrucke bringt.

§ 68. Wellenbewegungen in elastischen Körpern.

Bei den meisten Aufgaben der Festigkeitslehre spielt die auf die Masse des Körpers übertragene Fernkraft $\mathfrak{P}$ mit den Komponenten X, Y, Z gar keine Rolle. Gewöhnlich besteht sie nur aus dem Gewichte des Körpers und häufig genug würde sich der Spannungszustand kaum merklich ändern, wenn der

Körper ganz gewichtslos wäre und nur die an der Oberfläche übertragenen äußeren Kräfte an ihm wirkten. In solchen Fällen vereinfachen sich die Gl. (285) entsprechend, indem die letzten Glieder auf der linken Seite fortfallen. Mit derartigen Fällen werde ich mich in den folgenden Paragraphen ausschließlich beschäftigen; hier soll aber auf eine Anwendung der Gl. (285) aufmerksam gemacht werden, bei der diese Glieder beibehalten werden müssen.

Wenn der Körper nicht im Gleichgewichte, sondern in ungleichförmiger Bewegung begriffen ist, müssen sich die an dem Umfange eines Körperelementes übertragenen Spannungen samt dem Gewichte des Elementes zu einer Resultierenden zusammensetzen, die nach dem dynamischen Grundgesetze aus der Beschleunigung des Elementes berechnet werden kann. Ein rechtwinkliges Parallelepiped von den Kantenlängen dx, dy, dz hat die Masse

$$\mu dx dy dz,$$

wenn mit μ die spezifische Masse (das spezifische Gewicht, geteilt durch die Beschleunigung der Schwere) bezeichnet wird. Die elastischen Verschiebungen ξ, η, ζ sollen jetzt nicht nur Funktionen des Ortes, sondern auch Funktionen der Zeit t sein. Die Komponenten der Beschleunigung, die das Körperelement in einem gegebenen Augenblicke erfährt, werden durch die Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}$$

dargestellt und die Resultierende aller an dem Körperelemente angreifenden Kräfte muß nach dem dynamischen Grundgesetze die Komponenten

$$\mu \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} dx dy dz, \quad \mu \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} dx dy dz, \quad \mu \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} dx dy dz$$

haben. Anstatt die Aussage in dieser Form zu machen, kann man sich auch eine Kraft an jedem Körperelemente zugefügt denken, deren Komponenten den soeben angegebenen entgegengesetzt sind. Die wirklich vorhandenen Kräfte mit Einschluß

dieser willkürlich zugefügten müssen dann im Gleichgewichte stehen. Das ist die Überlegung, nach der man jeden Fall der Bewegung auf einen Gleichgewichtsfall zurückführen kann. In der Dynamik wird davon weiter die Rede sein; ich will aber jetzt schon erwähnen, daß man eine solche Schlußweise mit dem Namen des d'Alembertschen Prinzips bezeichnet.

Die willkürlich zugefügte Kraft, durch die wir den Fall auf einen Gleichgewichtsfall zurückführen, ist wie das Gewicht und wie andere Fernkräfte dem Volumen des Körperelementes proportional. Es ist daher am einfachsten, wenn wir sie unmittelbar mit $\mathfrak{P}$, oder ihre Komponenten mit X, Y, Z vereinigen. Man hat dann nur den Faktor $dx\,dy\,dz$ von den vorausgehenden Ausdrücken zu streichen, um die Kraft auf die Volumeneinheit zu beziehen und die zurückbleibenden Faktoren mit gewechseltem Vorzeichen zu X bezw. Y oder Z zu addieren.

Gegenüber diesen nach dem d'Alembertschen Prinzip zugefügten Massenkräften, die bei schnellen Schwingungen sehr groß werden können, ist das Eigengewicht des Körperelements gewöhnlich unbedeutend. Dieses hat übrigens ohnehin auf die elastischen Schwingungen, die wir untersuchen wollen, keinen Einfluß, da es keinem periodischen Wechsel unterworfen ist, sondern stets unter den gleichen Bedingungen und in gleicher Richtung und Größe auf den Körper einwirkt. Wir können uns daher den Körper ebenso gut auch als gewichtslos — aber nicht als masselos! — denken, d. h. wir können uns ihn etwa auf den Mond oder an eine andere Stelle mit noch kleinerer Beschleunigung der Schwere versetzt denken, ohne daß sich an den elastischen Bewegungen etwas ändern würde, vorausgesetzt, daß nur alle übrigen Bedingungen ungeändert blieben.

Dann bleibt als Massenkraft nur die Kraft $-\mu \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ in der Richtung der X-Achse u. s. f. zurück und die Gl. (285) nehmen die Form an

$$\left.\begin{aligned}\nabla^2\xi + \frac{m}{m-2}\cdot\frac{\partial e}{\partial x} = \frac{\mu}{G}\cdot\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2},\\ \nabla^2\eta + \frac{m}{m-2}\cdot\frac{\partial e}{\partial y} = \frac{\mu}{G}\cdot\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2},\\ \nabla^2\zeta + \frac{m}{m-2}\cdot\frac{\partial e}{\partial z} = \frac{\mu}{G}\cdot\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}.\end{aligned}\right\} \tag{288}$$

Diese Gleichungen sprechen das Gesetz aus, nach dem sich eine elastische Formänderung im Verlaufe der Zeit innerhalb eines elastischen Körpers ausbreiten muß. Wir wissen schon aus der Erfahrung, daß dies in Form einer Welle geschieht; eine besondere Art dieser Wellen kennen wir als die Schallwellen. Wir wollen zunächst sehen, was aus den Gl. (288) über die Schallwellen zu schließen ist.

Betrachten wir eine ebene Schallwelle, die sich in der Richtung der X-Achse ausbreitet und erinnern wir uns, daß nach den Lehren der Experimentalphysik die Schallbewegung als eine periodische Bewegung aufzufassen ist, die bei einem einfachen Tone als eine Sinusfunktion der Zeit dargestellt werden kann, so werden wir zu der Ansicht geführt, daß

$$\xi = A \sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{\tau}\right); \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0 \tag{289}$$

eine mögliche Schwingungsform des elastischen Körpers darstellen müsse. Wenn ich vorher sagte, daß die Sinusfunktion aus den Versuchen zu entnehmen wäre, so ist damit natürlich nur gemeint, daß sich die Versuchsergebnisse ungefähr so darstellen lassen. Ob der gewählte Ansatz genau richtig ist kann erst geschlossen werden, indem man prüft, ob er die Gl. (288) erfüllt. Im übrigen bemerke ich noch zu den Konstanten, die in den Ausdruck für ξ aufgenommen wurden, daß A den größten Wert darstellt, den ξ während der Schwingung erreicht; man nennt A die Amplitude oder den Ausschlag der Schwingung. Die Konstante λ hat die Bedeutung der Wellenlänge der Schwingung, denn wenn man x um λ vermehrt, ohne die Zeit zu ändern, vergrößert sich der Winkel, von dem der Sinus genommen werden soll, um 2π, die frühere Wertreihe des Sinus wiederholt sich also von diesem Punkte

an wieder, wenn wir darüber hinausgehen. Ebenso hat τ die Bedeutung der Dauer einer vollen Schwingung, da die Änderung von t um τ oder um ein Vielfaches davon nichts an dem Sinus oder an ξ ändert. Denkt man sich gleichzeitig x und t ein wenig vermehrt, so kann ξ denselben Wert beibehalten; man sagt dann, die Welle habe sich in der Zeit Δt um die Strecke Δx fortbewegt. In der Tat finden sich nach Δt alle Zustände (alle Phasen, wie man zu sagen pflegt) in derselben Aufeinanderfolge, aber um die Strecke Δx in der Richtung der X-Achse, verschoben, falls nur

$$\frac{\Delta x}{\lambda} - \frac{\Delta t}{\tau} = 0$$

ist. Man kann nun auch von der Geschwindigkeit reden, mit der sich die Welle fortpflanzt. Dabei muß man nur beachten, daß hier nicht, wie sonst in der Mechanik, darunter die Bewegung eines Körpers, also etwa die Bewegung gemeint ist, die das Volumenelement im gegebenen Augenblicke ausführt, sondern nur die Geschwindigkeit, mit der ein gewisser genau definierbarer Zustand fortschreitet. Bezeichnet man die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Schallbewegung mit v, so ist v bestimmt durch

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

oder, wenn man das Verhältnis der Werte Δx und Δt aus der vorausgehenden Gleichung entnimmt,

$$v = \frac{\lambda}{\tau}. \tag{290}$$

Nach diesen Vorbemerkungen müssen wir prüfen, ob der durch die akustischen Erscheinungen nahegelegte Ansatz (289) die Gl. (288) befriedigt. Dabei ist wohl zu bedenken, daß diese Gleichungen auf allgemeinen Gesetzen der Mechanik, an deren strenger Gültigkeit kein Zweifel bestehen kann und außerdem nur noch auf dem Hookeschen Elastizitätsgesetze beruhen. Sofern auch dieses letzte bei dem betreffenden Stoffe erfüllt ist, können wir den Ergebnissen der Gleichungen (288)

unbedingtes Vertrauen entgegenbringen. — Wir bilden zunächst die spezifische Volumenänderung e. Durch Einsetzen der Werte (289) in Gl. (278) finden wir

$$e = A\frac{2\pi}{\lambda}\cos 2\pi\left(\frac{x}{\lambda}-\frac{t}{\tau}\right)$$

und hiermit werden die Differentialquotienten von e

$$\frac{\partial e}{\partial x} = -A\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda}-\frac{t}{\tau}\right); \quad \frac{\partial e}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial e}{\partial z} = 0.$$

Die zweite und dritte der Gleichungen (288) sind erfüllt, da sich jedes der in ihnen vorkommenden Glieder auf Null reduziert. Ferner ist nach (289)

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = A\frac{2\pi}{\lambda}\cos 2\pi\left(\frac{x}{\lambda}-\frac{t}{\tau}\right); \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \xi}{\partial z} = 0.$$

Daher reduziert sich in diesem Falle $\nabla^2\xi$ auf

$$\nabla^2\xi = \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = -A\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda}-\frac{t}{\tau}\right),$$

d. h. auf denselben Wert wie $\frac{\partial e}{\partial x}$. Auch nach t läßt sich ξ ohne weiteres differentiieren und wenn man alle diese Werte in die erste der Gl. (288) einsetzt, geht sie über in

$$-\frac{2m-2}{m-2}A\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda}-\frac{t}{\tau}\right) = -\frac{\mu}{G}A\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 \sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda}-\frac{t}{\tau}\right).$$

Man sieht, daß diese Gleichung in der Tat identisch erfüllt ist, ohne Rücksicht auf den Wert der Amplitude A, d. h. der Stärke des Schalls, falls nur die Bedingungsgleichung

$$\frac{2m-2}{m-2}\cdot\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{\mu}{G}\cdot\left(\frac{1}{\tau}\right)^2$$

zwischen Wellenlänge λ und Schwingungsdauer τ befriedigt ist. Beide müssen notwendig voneinander abhängen und zwar so, daß das Verhältnis $\frac{\lambda}{\tau}$ oder die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v unabhängig von der Wellenlänge und nur von den physikalischen Eigenschaften des Stoffes abhängig ist. Durch Auflösen der Gleichung nach $\frac{\lambda}{\tau}$ erhält man

$$v = \frac{\lambda}{\tau} = \sqrt{\frac{G}{\mu}\cdot\frac{2m-2}{m-2}}. \tag{291}$$

Diese Folgerung der Theorie ist nun in der Tat in bester Übereinstimmung mit der Erfahrung; namentlich der Schluß, daß lange und kurze Wellen ebenso wie schwache oder starke Wellen mit derselben Geschwindigkeit fortgepflanzt werden müssen, hat sich bisher vollständig bewährt.

Natürlich gilt diese ganze Ableitung nur für die Schallwellen in den elastischen festen Körpern; für die Schallwellen in der Luft läßt sich eine ähnliche Entwicklung anstellen, die ebenfalls zu einer mit Gl. (291) verwandten Gleichung für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v führt. — Nimmt man für Flußeisen $m = \frac{10}{8}$, $G = 850\,000$ atm und das spezifische Gewicht = 7,7, d. h. die spezifische Masse

$$\mu = \frac{0{,}0077 \text{ kg}}{1 \text{ cm}^3 \cdot 981 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}} = 785 \cdot 10^{-8} \frac{\text{kg sec}^2}{\text{cm}^4},$$

so wird

$$v = \sqrt{\frac{850\,000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}}{785 \cdot 10^{-8} \frac{\text{kg sec}^2}{\text{cm}^4}} \cdot 3{,}5} = 616 \cdot 10^3 \frac{\text{cm}}{\text{sec}} = 6160 \frac{\text{m}}{\text{sec}}.$$

Die Schallgeschwindigkeit in der Luft ist bekanntlich $333 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$. Die im Flußeisen haben wir fast 20mal so groß berechnet. In der Tat zeigt aber auch der Versuch, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in festen Körpern viel größer ist als in der Luft.

Der Umstand, daß die Fortpflanzungsgesetze für den Schall auch bei Steinen, Mauerwerk u. s. f. ganz gut mit den aus dem Hookeschen Gesetze abgeleiteten Folgerungen übereinstimmen, gibt den stärksten Grund für die Vermutung ab, daß auch diese Körper bei sehr kleinen elastischen Formänderungen, wie sie bei Schallschwingungen vorkommen, ziemlich genau dem Hookeschen Gesetze gehorchen, obschon sie bei größeren Formänderungen erheblich davon abweichen.

Setzt man in Gl. (291) $m = 2$, so liefert sie $v = \infty$. Wir sahen schon früher (siehe S. 54), daß m nie kleiner als 2 werden kann, und daß bei $m = 2$ der Körper keine Volumenänderungen unter dem Einflusse des Spannungszustandes erfährt, daß er also unzusammendrückbar ist. In einem unzusammendrückbaren (raumbeständigen) Körper würde sich also eine longitudinale Welle, wie wir sie jetzt behandelten, mit unendlich großer Geschwindigkeit fortpflanzen, d. h. von einer eigentlichen Wellenbewegung könnte gar nicht mehr die Rede sein, sondern nur von einer augenblicklichen Übertragung der an einer Stelle hervorgebrachten Störung über den ganzen Raum, den der Körper einnimmt.

Außer den longitudinalen kommen in der Physik noch die transversalen Wellenbewegungen vor. Um eine Transversalwelle analytisch darzustellen, setze ich

$$\xi = A \sin 2\pi\left(\frac{y}{\lambda} - \frac{t}{\tau}\right); \quad \eta = 0; \quad \zeta = 0. \tag{292}$$

Die Schwingungen erfolgen hier immer noch, wie bei den Gl. (289), in der Richtung der X-Achse; dagegen fällt der Wellenzug jetzt in die Richtung der Y-Achse. Weil die Schwingungsrichtung senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung der Welle steht, wird die Welle als Transversalwelle bezeichnet. Für die Konstanten A, λ und τ gelten dieselben Bemerkungen wie vorher; namentlich ist auch hier immer noch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\lambda}{\tau}.$$

Wir überzeugen uns, ob der Ansatz (292) die Gleichungen (288) erfüllt. Für e erhalten wir hier

$$e = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0.$$

Die Transversalwellen haben also die Eigentümlichkeit, daß sie ohne Änderung des Volumens vor sich gehen. Die longitudinalen Wellen werden daher im Gegensatze zu ihnen auch als Kompressionswellen bezeichnet. Ein unzusammendrückbarer Körper, wie man sich bei der Elastizitätstheorie des Lichtes den Lichtäther dachte, kann daher wohl transversale, aber keine longitudinalen Wellen fortpflanzen. Damit stimmte überein, daß das Licht aus den Polarisationserscheinungen als transversale Wellenbewegung erkannt wurde.

Im Sinne dieser älteren theoretischen Optik beschrieben die Gleichungen (292) einen einfarbigen, eben polarisierten Lichtstrahl; einfarbig, weil nur Schwingungen von derselben Wellenlänge λ vorkommen und eben polarisiert, weil die Schwingungen nur in der Richtung der X-Achse, oder, wie man auch sagen kann, in der XY-Ebene erfolgen. Als Polarisationsebene wurde nach der Theorie von Fresnel die XZ-Ebene, nach der Neumannschen dagegen die XY-Ebene selbst angesehen. Mit Rücksicht auf $e = 0$ vereinfachen sich für die Transversalwellen die Gleichungen (288) zu

$$\nabla^2 \xi = \frac{\mu}{G} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}; \quad \nabla^2 \eta = \frac{\mu}{G} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}; \quad \nabla^2 \zeta = \frac{\mu}{G} \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \qquad (293)$$

und diese bilden die Grundlage der theoretischen Optik und zwar nicht nur der älteren, sondern auch der neueren elektromagnetischen Lichttheorie. Merkwürdigerweise führt nämlich die letztgenannte Theorie von ganz verschiedenen Ausgangspunkten doch zu fast genau denselben Gleichungen wie die Elastizitätstheorie. Die Gleichungen (293) sind daher auch allgemein unter dem Namen der Wellengleichungen bekannt.

Durch den Ansatz (292) sind die beiden letzten der Wellengleichungen ohne weiteres befriedigt. Für die in der ersten vorkommende Größe $\nabla^2 \xi$ erhalten wir

$$\nabla^2 \xi = \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = -A \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \sin 2\pi \left(\frac{y}{\lambda} - \frac{t}{\tau}\right)$$

und ebenso

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -A \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 \sin 2\pi \left(\frac{y}{\lambda} - \frac{t}{\tau}\right).$$

Die Wellengleichungen sind also identisch erfüllt, wenn

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = \frac{\mu}{G} \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2$$

gesetzt wird und daraus folgt für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v_t der Transversalwellen

$$v_t = \sqrt{\frac{G}{\mu}}. \qquad (294)$$

Diese ist also immer kleiner als die Fortpflanzung der Schallwellen. Flüssigkeiten können keine Transversalwellen, sondern nur longitudinale Wellen fortleiten; so kommt es, daß die Transversalschwingungen der gewöhnlichen festen elastischen Körper zu keinen Sinnesempfindungen Anlaß geben, weil sie durch die Luft nicht zu den Sinnesorganen (also etwa zum Ohre) fortgepflanzt werden.

§ 69. Die Eindeutigkeit der Lösung des Problems.

Bei allen folgenden Untersuchungen nehme ich an, daß die Körper in Ruhe sind und daß das Eigengewicht jenes Körpers, dessen Spannungs- und Formänderungszustand untersucht werden soll, unerheblich gegenüber den Lasten ist, die an seiner Oberfläche auf ihn übertragen werden. Diese Lasten sind außerdem überall als gegeben zu betrachten.

Man nehme nun an, daß irgend ein System von Verschiebungen ξ, η, ζ vorgeschlagen sei, von dem sich nachweisen läßt, daß es die Grundgleichungen befriedigt. Diese Grundgleichungen selbst lassen sich hier übrigens mit Rücksicht auf die ausgesprochene Voraussetzung in der einfacheren Form

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2 \xi + \frac{m}{m-2} \cdot \frac{\partial e}{\partial x} &= 0 \\ \nabla^2 \eta + \frac{m}{m-2} \cdot \frac{\partial e}{\partial y} &= 0 \\ \nabla^2 \zeta + \frac{m}{m-2} \cdot \frac{\partial e}{\partial z} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{295}$$

anschreiben. Wir wollen der kürzeren Ausdrucksweise wegen ein solches System von Verschiebungen, das diese Gleichungen befriedigt, ein mögliches nennen. Damit wird nur gesagt, daß dieses System nicht gegen die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen verstößt, die zwischen den Spannungen an jedem Körperelemente bestehen müssen, — unter der Voraussetzung natürlich, daß der Stoff, aus dem der Körper besteht, dem Hookeschen Elastizitätsgesetze gehorcht. Die wirklichen Verschiebungen müssen also jedenfalls zu den möglichen gehören; es fragt sich aber noch, ob die vorgeschlagenen Werte von ξ, η, ζ mit den wirklichen übereinstimmen.

Um dies zu prüfen, erinnern wir uns, daß nach den Gl. (279) und (283) zu jedem Zwangszustande — wie wir den durch die Verschiebungen ξ, η, ζ beschriebenen Zustand nennen können — ein eindeutig bestimmter Spannungszustand gehört. Mit der Annahme eines Zwangszustandes ξ, η, ζ erhalten wir daher auch überall an der Oberfläche des Körpers Spannungen, die dort mit den von außen her übertragenen Lasten im Gleichgewichte stehen müssen. Diese Gleichgewichtsbedingungen an der Körperoberfläche werden durch die Gleichungen (6) ausgesprochen und sie müssen ebenfalls an jeder Stelle des Umfanges erfüllt sein, wenn der mögliche Spannungszustand mit dem wirklichen, der der besonderen Art der

Belastung entspricht, übereinstimmen soll. Wir wollen jetzt annehmen, daß der aus dem vorgeschlagenen Zwangszustande abgeleitete Spannungszustand auch dieser Bedingung überall genüge. Dann läßt sich in der Tat behaupten, daß der vorgeschlagene Zwangszustand mit dem wirklichen übereinstimmt. Mit anderen Worten heißt dies, daß es nur ein einziges System von Verschiebungen ξ, η, ζ gibt, das die Grundgleichungen (295) befriedigt und zugleich zu Spannungen führt, die an der Oberfläche des Körpers den dort bestehenden Grenzbedingungen genügen.

Um dies zu beweisen, wollen wir zunächst annehmen, es wäre noch ein zweites System von Verschiebungen ξ', η', ζ' möglich, das alle Bedingungen ebenfalls erfüllte. Dann geben auch die Differenzen

$$\xi'' = \xi - \xi'; \quad \eta'' = \eta - \eta'; \quad \zeta'' = \zeta - \zeta'$$

ein mögliches System von Verschiebungen an, wie man durch Einsetzen dieser Werte in die Grundgleichungen (295) erkennt. Denn man hätte z. B.

$$e'' = e - e' \quad \text{und} \quad \nabla^2 \xi'' = \nabla^2 \xi - \nabla^2 \xi'$$

und die erste der Grundgleichungen würde für das neue Verschiebungssystem übergehen in

$$\nabla^2 \xi - \nabla^2 \xi' + \frac{m}{m-2} \cdot \frac{\partial e}{\partial x} - \frac{m}{m-2} \cdot \frac{\partial e'}{\partial x} = 0.$$

Nach der Voraussetzung, daß schon ξ und ξ' mögliche Verschiebungen waren, muß aber für sich

$$\nabla^2 \xi + \frac{m}{m-2} \cdot \frac{\partial e}{\partial x} = 0 \quad \text{und} \quad \nabla^2 \xi' + \frac{m}{m-2} \cdot \frac{\partial e'}{\partial x} = 0$$

sein. In der Tat ist also dann auch

$$\nabla^2 \xi'' + \frac{m}{m-2} \cdot \frac{\partial e''}{\partial x} = 0$$

und ebenso bei den beiden anderen Gleichungen. Der Grund für die Möglichkeit dieser Superposition liegt darin, daß die Grundgleichungen linear sind.

Dem möglichen Verschiebungssysteme ξ'', η'', ζ'' entspricht nun auch ein bestimmter Spannungszustand des Körpers. Auch diese Spannungen folgen aus den früheren, für beide Fälle bestehenden durch Bildung der Differenzen, wie aus den Gleichungen (279) und (283) hervorgeht. Man hat also z. B.

$$\sigma_x'' = \sigma_x - \sigma_x'$$

u.s.f. Wir nahmen ferner an, daß ξ, η, ζ und ξ', η', ζ' auch allen Grenzbedingungen genügen sollten. An jeder Stelle der Körperoberfläche bilden also sowohl die Spannungen σ_x u. s. f. als die σ_x' u. s. f. ein Gleichgewichtssystem mit den von außen her übertragenen Druckkräften. Die Spannungen σ_x'' u. s. f. verlangen daher, wenn sie an der Oberfläche des Körpers auftreten sollen, daß dort gar keine Druckkräfte von außen her übertragen werden. Gehörte zu den Grenzbedingungen, daß ein bestimmter Punkt des Körpers festgehalten sei, so mußte dort sowohl $\xi = 0$ als $\xi' = 0$ u. s. f. und daher auch $\xi'' = \xi - \xi' = 0$ sein.

Wir haben also in dem Zwangs- und Spannungszustande, der durch die Werte ξ'' u. s. f. und σ_x' u. s. f. beschrieben ist, einen Zustand des Körpers vor uns, bei dem gar keine äußeren Kräfte auf diesen übertragen werden; mit anderen Worten, dieser Zustand entspricht dem natürlichen Zustande des Körpers. Nun habe ich freilich schon früher einmal darauf aufmerksam gemacht, daß selbst im unbelasteten Zustande des Körpers unter Umständen Spannungen bestehen können, z. B. die sogenannten Gußspannungen. Diese hängen aber von Umständen ab, die mit unserer Aufgabe nichts zu tun haben und deren Berechnung daher auch nicht verlangt werden kann. Wir wollen nur jene Spannungen ermitteln, die durch die Lasten hervorgerufen werden. Wir nehmen daher an, daß im natürlichen Zustande keine Spannungen auftreten und setzen σ_x'' u. s. f. $= 0$. Ausdrücklich müssen wir uns dabei freilich daran erinnern, daß etwaige Eigenspannungen von unserer Untersuchung überhaupt nicht berührt werden. Mit $\xi'' = 0$, $\eta'' = 0$, $\zeta'' = 0$ folgt aber

$$\xi' = \xi; \quad \eta' = \eta; \quad \zeta' = \zeta,$$

d. h. die beiden vorgeschlagenen Zwangszustände, die alle Bedingungen mit Einschluß der Grenzbedingungen erfüllen sollten, müssen identisch miteinander sein. Die Lösung der Aufgabe ist daher eine eindeutige und wir sind sicher, den wahren Spannungszustand ermittelt zu haben, wenn wir nachweisen können, daß er allen aufgestellten Bedingungen entspricht.

§ 70. Die Lösung von de Saint-Vénant.

Als in den vorausgehenden Abschnitten die Biegung und die Verwindung eines Stabes untersucht wurde, nahm ich überall ohne weiteren Beweis an, daß die parallel zur Stabachse verlaufenden Fasern keinen merklichen Querdruck oder Quer-

zug und auch keine Schubspannungen in der Richtung quer zur Stabachse aufeinander übertrügen. Mit anderen Worten, wenn wie seither stets die X-Achse in die Richtung der Stabmittellinie gelegt ist, wurde

$$\sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0 \tag{296}$$

gesetzt. Wenn dies auch nicht gerade ausdrücklich ausgesprochen wurde, so wurde doch auf Spannungen in diesen Richtungen weder bei der Biegung noch bei der Torsion jemals Rücksicht genommen. Sie wurden stillschweigend entweder als nicht vorhanden oder doch als unerheblich gegenüber jenen Spannungen angesehen, deren Berechnung durchgeführt wurde.

Man kann sich jetzt nachträglich darüber Rechenschaft geben, inwiefern dies nach der strengen Theorie zulässig ist und zu welchen weiteren Schlüssen diese strenge Theorie für einen solchen Spannungszustand führt, bei dem die Gl. (296) genau erfüllt sind. Diesen Weg hat de Saint-Venant bei seiner berühmten Untersuchung eingeschlagen.

Zunächst ist klar, daß ein solcher Spannungszustand genau nur dann verwirklicht sein kann, wenn auf die Mantelfläche des Stabes keine Druckkräfte und auch keine Reibungen oder überhaupt keine tangentialen Kräfte in der Richtung quer zur Stabachse übertragen werden, denn sonst müßten, zunächst wenigstens an der Mantelfläche selbst, wo solche äußere Kräfte angebracht wären, die in Gl. (296) aufgeführten Spannungskomponenten von Null verschieden sein, um die durch die Gl. (6) ausgesprochenen Grenzbedingungen zu erfüllen. Die Saint-Vénantsche Theorie kann daher nur für solche Stäbe genau richtig sein, bei denen nur an den beiden Endquerschnitten von außen her Lasten übertragen werden; allenfalls können dazu noch tangentiale äußere Kräfte an der Mantelfläche treten, die der Stabachse parallel sind. Der letzte Fall kommt aber bei den Anwendungen kaum in Frage.

Wenn wir die Spannungen mit Hilfe der Gl. (279) und

(283) in den Verschiebungen ausdrücken, können wir die Gl. (296) auch durch die folgenden

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{e}{m-2} = 0; \quad \frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{e}{m-2} = 0; \quad \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0$$

ersetzen oder mit Rücksicht auf die Bedeutung von e auch durch

$$e = \frac{m-2}{m} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x}; \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \zeta}{\partial z} = -\frac{1}{m} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x}; \quad \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0. \tag{297}$$

Die Grundgleichungen (295) gehen hiermit über in

$$\left.\begin{aligned} 2\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} + \frac{m-1}{m} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} = 0 \\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \frac{m-1}{m} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial z} = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{298}$$

Hier sind die Werte von e, von $\frac{\partial \eta}{\partial y}$ und von $\frac{\partial \zeta}{\partial z}$ aus den Gleichungen (297) schon eingesetzt. Dagegen ist auf die letzte der Gl. (297) noch keine Rücksicht genommen. Wir müssen uns jetzt davon überzeugen, ob die Gl. (298) mit den Gl. (297) in der Tat vereinbar sind, ob also kein Widerspruch zwischen beiden besteht und welche Bedingungen erfüllt sein müssen, damit dies zutreffe. Zu diesem Zwecke ist es am besten, zunächst alle Differentialquotienten nach Möglichkeit in solchen von ξ auszudrücken, um zu Gleichungen zu gelangen, die diese Veränderliche allein enthalten. Wir beginnen mit denen von η. Nach der letzten der Gleichungen (297) ist

$$\frac{\partial \eta}{\partial z} = -\frac{\partial \zeta}{\partial y}; \quad \text{also} \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} = -\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y \partial z}$$

und daher, unter Berücksichtigung der zweiten der Gleichungen (297),

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} = +\frac{1}{m} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y}. \tag{299}$$

Setzen wir diesen Wert in die zweite der Gleichungen (298) ein, so geht sie über in

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y}. \tag{300}$$

Gerade so verfahren wir, um die Differentialquotienten von ζ in ξ auszudrücken. Aus der letzten der Gl. (297)

$$\frac{\partial \zeta}{\partial y} = -\frac{\partial \eta}{\partial z} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 \eta}{\partial y \partial z}$$

folgt mit Rücksicht auf die zweite der Gl. (297)

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = +\frac{1}{m} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial z} \tag{301}$$

und, wenn wir dies in die letzte der Gl. (298) einsetzen, auch

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial z}. \tag{302}$$

Außerdem liefert die letzte der Gl. (297), wenn wir sie zweimal nach x differentiieren,

$$\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^2 \partial z} + \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^2 \partial y} = 0$$

und hier können wir für die zweiten Differentialquotienten nach x ihre Werte aus den Gl. (300) und (302) einsetzen. Die Gleichung geht dann über in

$$\frac{\partial^3 \xi}{\partial x \partial y \partial z} = 0 \tag{303}$$

und damit haben wir schon eine sehr einfache Bedingung gefunden, der die Verschiebung ξ parallel zur Stabachse jedenfalls genügen muß, wenn der durch die Gl. (296) ausgedrückte de Saint-Vénantsche Gleichgewichtszustand verwirklicht sein soll. Wir können aber sofort auch noch einige andere Beziehungen angeben, denen die dritten Differentialquotienten von ξ unterworfen sein müssen.

Zunächst ist nach Gl. (300)

$$\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^2 \partial y} = -\frac{\partial^3 \xi}{\partial x \partial y^2}$$

und andererseits nach der zweiten der Gl. (297) bei zweimaliger Differentiation nach x

$$\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^2 \partial y} = -\frac{1}{m} \cdot \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3}.$$

Der Vergleich beider Werte liefert

$$\frac{\partial^3 \xi}{\partial x \partial y^2} = \frac{1}{m} \cdot \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3}. \tag{304}$$

In derselben Weise finden wir aus Gl. (302)

$$\frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^2 \partial z} = -\frac{\partial^3 \xi}{\partial x \partial z^2}$$

und aus der zweiten der Gl. (297) durch Differentiation

$$\frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^2 \partial z} = -\frac{1}{m} \cdot \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3},$$

also aus dem Vergleiche beider Werte

$$\frac{\partial^3 \xi}{\partial x \partial z^2} = \frac{1}{m} \cdot \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3}. \tag{305}$$

Bis jetzt haben wir noch keinen Gebrauch von der ersten der Gleichungen (298) gemacht, die überhaupt nur Differentialquotienten von ξ enthält. Da wir schon ziemlich viel über die dritten Differentialquotienten dieser Veränderlichen ausgemacht haben, wollen wir diese Gleichung noch einmal nach x differentiieren; wir finden dann

$$2\frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \xi}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 \xi}{\partial x \partial z^2} = 0$$

und hier können wir für das zweite und dritte Glied auf der linken Seite die in den Gl. (304) und (305) gefundenen Werte einsetzen. Die Gleichung geht dann über in

$$\frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3} = 0 \tag{306}$$

und damit folgt zugleich auch

$$\frac{\partial^3 \xi}{\partial x \partial y^2} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^3 \xi}{\partial x \partial z^2} = 0. \tag{307}$$

Durch die Gl. (303), (306) und (307) wird über die Eigenschaften der Unbekannten ξ schon ein recht genauer Einblick gewonnen. Wir können diese Gleichungen übersichtlich in folgender Weise zusammenfassen:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial z}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) = 0. \tag{308}$$

Die Form der Funktion ξ selbst läßt sich daraus zwar noch nicht bestimmen, wohl aber, was fast noch wichtiger ist, der analytische Ausdruck von $\frac{\partial \xi}{\partial x}$, d. h. von der spezifischen

Dehnung in der Richtung der Stabmittellinie. Diese kann nämlich, wie aus den Gl. (308) hervorgeht, x nur in der ersten Potenz enthalten (denn der zweite Differentialquotient nach x verschwindet nach diesen Gleichungen) und ebenso muß sie linear in Bezug auf y und auf z sein. Außerdem kann auch kein Glied darin auftreten, das y und z zugleich enthielte. Der allgemeinste Ausdruck, der mit den Gl. (308) verträglich ist lautet daher

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4 xy + a_5 xz, \qquad (309)$$

in der die a konstante Größen, also unabhängig von x, y, z sind, während sie von der Größe der Belastung des Stabes abhängig sein können und müssen.

Betrachten wir nun noch etwas näher, was wir hiermit gefunden haben. Nach dem Elastizitätsgesetze ist

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = E\frac{\partial \xi}{\partial x},$$

da die anderen Spannungen σ_y und σ_z Null sind. Durch Multiplikation von Gl. (309) mit E finden wir daher auch die Normalspannungen σ_x. Uns interessiert jetzt nur der Umstand, daß σ_x hierdurch als eine lineare Funktion der Querschnittskoordinaten dargestellt wird. Das war aber die Annahme, von der wir willkürlich bei den Untersuchungen des dritten Abschnittes über die Biegungsfestigkeit der Stäbe ausgingen und wir finden jetzt nachträglich, daß diese Annahme gar nicht so willkürlich ist, wie sie damals hingestellt wurde, daß sie vielmehr für Körper, die dem Hookeschen Gesetze folgen, eine notwendige Folge aus der anderen Annahme ist, daß kein Anlaß zur Übertragung von Spannungen σ_y, σ_z und τ_{yz} zwischen den einzelnen Fasern gegeben sei.

Damit ist für den Fall der Biegung jede weitere Untersuchung überflüssig gemacht. Wir müßten, wenn wir die Betrachtung nach dieser Richtung hin fortsetzen wollten, not-

wendig wieder zu den früheren Ergebnissen gelangen, denn nachdem die Annahme von der linearen Spannungsverteilung einmal hypothetisch eingeführt war, schloß sich daran das Übrige folgerichtig und es zeigte sich namentlich, daß sich überall Gleichgewicht herstellen läßt, ohne daß Kräfte σ_y, σ_z, τ_{yz} zu Hilfe genommen werden mußten. Wir brauchen daher jetzt nicht noch einmal nachzuweisen, daß die Gl. (297) und (298), falls man die notwendige Bedingung (309) erfüllt, in der Tat in Übereinstimmung miteinander sind und einem möglichen Gleichgewichtszustande entsprechen, der bei passender Anbringung der äußeren Kräfte an den Endquerschnitten des Stabes auch sofort verwirklicht werden kann.

§ 71. Rückblick auf die vorige Entwicklung.

Wer die Entwicklungen des vorigen Paragraphen zum ersten Male kennen lernt, wird sie zunächst umständlich und langwierig finden. Nachdem man sich aber einmal dazu entschlossen hat, Schritt für Schritt die ganze Betrachtung nachzuprüfen, wird man sich überzeugen, daß jeder Schritt für sich genommen ganz einfach und leicht verständlich ist. Nur die Aufeinanderfolge der einzelnen Schlüsse liegt nicht so klar zu Tage; man sieht zuerst nicht recht ein, zu was es nützen soll, die verschiedenen Differentiationen auszuführen und die Ergebnisse in der Weise, wie es geschehen war, miteinander zu vergleichen. Man bedenke aber, daß es sich darum handelte, die Verträglichkeit von sechs Gleichungen zwischen drei Unbekannten miteinander zu prüfen. Auch wenn es sich gar nicht um Differentialgleichungen, sondern um gewöhnliche Gleichungen der Algebra gehandelt haben würde, hätte man in diesem Falle danach streben müssen, zwei der Unbekannten zu eliminieren, um zu Beziehungen zu gelangen, die für die dritte Unbekannte erfüllt sein müssen. Von diesem Bestreben ist der ganze Gedankengang des vorigen Paragraphen beeinflußt und es kann nach den Erfahrungen, die man schon in der gewöhnlichen Algebra beim Auflösen von Gleichungen

macht, nicht überraschen, daß gewisse Verbindungen, die den Eindruck von Kunstgriffen machen, schneller zu dem gewünschten Ziele führen, als wenn eine solche Anleitung fehlte.

Es fragt sich ferner, was nun mit dem Resultate, zu dem wir gelangt sind, für die Biegungstheorie gewonnen ist. Dabei müssen wir uns vor allen Dingen daran erinnern, daß nach den Untersuchungen von § 69 jede mögliche Lösung zur wirklichen Lösung wird, sobald die von außen her auf die Körperoberfläche übertragenen Lasten an jeder Stelle in Übereinstimmung mit dem Spannungszustande stehen, der zu dieser Lösung gehört. Denken wir uns etwa einen Balken, der auf der einen Seite eingemauert ist und an dem frei hinauskragenden Ende eine Last trägt. Wenn die Saint-Vénantsche Lösung die wirkliche für diesen Balken sein soll, muß zunächst die ganze Mantelfläche des Balkens frei von Lasten sein, was hier von vornherein erfüllt ist. Ferner darf aber auch an dem Endquerschnitte die Last nicht in beliebiger Weise angebracht sein, sie muß vielmehr über die ganze Fläche dieses Endquerschnittes in der Weise verteilt sein, wie wir sie früher für die Verteilung der Schubspannungen im gebogenen Balken gefunden haben. Und schließlich muß auch die Befestigung an der Einmauerungsstelle so beschaffen sein, daß die zu der möglichen Lösung gehörigen Formänderungen, also die Querdehnung der gedrückten Fasern und die Querverkürzung der gezogenen dadurch nicht gehindert wird.

Wenn alle diese Bedingungen genau erfüllt wären, außerdem auch der Stoff, aus dem der Balken hergestellt ist, dem Hookeschen Gesetze gehorchte, könnte kein Zweifel darüber bestehen, daß die Saint-Vénantsche Lösung streng richtig wäre. In den praktisch vorkommenden Fällen kann aber von einer strengen Erfüllung der genannten Bedingungen kaum jemals die Rede sein und die ganze Betrachtung würde durch diesen Umstand sehr an Wert verlieren, wenn man nicht zeigen könnte, daß eine Verletzung dieser Bedingungen bis zu einem gewissen Grade ohne wesentlichen Einfluß auf den wirklichen Spannungszustand ist.

Man achte z. B. auf die Bedingung, daß sich die Last über den Endquerschnitt nach dem für die Schubspannungen gültigen Gesetze verteilen muß. Wenn anstatt dessen ein Strick um das freie Stabende geschlungen ist, an dem die Last aufgehängt wird, kann kein Zweifel darüber bestehen, daß in unmittelbarer Nachbarschaft des Stabendes die Spannungsverteilung durchaus von der de Saint-Vénantschen verschieden ist, da der wirkliche Spannungszustand hier jetzt ganz anderen Grenzbedingungen unterworfen ist. Je weiter man aber von dem Stabende abrückt, desto weniger Unterschied macht es aus, wie die Last in Wirklichkeit am Stabende angreift. Um dies zu erkennen, stelle man sich ein Gleichgewichtssystem äußerer Lasten vor, so daß ein Teil mit der de Saint-Vénantschen Angriffsweise der Last am Endquerschnitte übereinstimmt, während der Rest überall genau entgegengesetzt mit den von dem Stricke übertragenen Oberflächenkräften ist. Wenn man das so zusammengesetzte Lastensystem zu dem durch den Strick verursachten hinzufügt, kommt genau die de Saint-Venantsche Belastungsweise heraus. Der Unterschied zwischen den Spannungszuständen in beiden Fällen der Angriffsweise der Last an dem Ende wird daher durch jenen Spannungszustand angegeben, der dem angeführten Gleichgewichtssysteme der Lasten entspricht. Nun ist aber von vornherein klar, daß ein am Stabende dicht zusammengedrängtes Lastensystem, das dort im Gleichgewichte steht, zwar in der Nachbarschaft erhebliche Formänderungen und Spannungen hervorrufen kann, daß aber der Einfluß schnell verschwinden muß, wenn wir uns von dem Stabende entfernen. Mit anderen Worten: wenn ich etwa eine Schiene von einigen Metern Länge am einen Ende in einem Schraubstocke der Quere nach zusammendrücke oder sie sonst in irgend einer Weise beanspruche, so daß die hier übertragenen Kräfte unter sich im Gleichgewichte stehen, so muß der Einfluß der Behandlung, die dieses Schienenende erfährt, schnell verschwinden, je weiter entfernt von dem Ende gelegene Teile man ins Auge faßt. Damit ist aber gezeigt, daß die genauere Art der Lastüber-

tragung von wesentlichem Einflusse nur in der nächsten Nachbarschaft der Angriffsstelle der Last ist. Auch bei einer anderen Art des Lastangriffs kann daher in einiger Entfernung von der Belastung die Saint-Vénantsche Lösung noch als hinreichend genau zutreffend angesehen werden. Bei einer Entfernung, die etwa das Drei- bis Vierfache der größten Querschnittsabmessung bildet, ist jedenfalls keine merkliche Abweichung mehr zu erwarten. Durch diesen Umstand gewinnt die im vorigen Paragraphen vorgetragene Theorie erst ihren vollen Wert.

Die Absicht, die uns bei dem Eintritte in die Untersuchungen der strengen Elastizitätstheorie leitete, nämlich eine befriedigendere Grundlage für die Formeln der Festigkeitslehre zu gewinnen, als sie die hypothetische Aufstellung von Formänderungs- oder Spannungsverteilungsgesetzen für die besonderen Fälle bildet, ist jetzt erreicht. Freilich handelt es sich dabei bis jetzt mehr um eine nachträgliche bestätigende Kritik, als um die Gewinnung neuer Ergebnisse. Immerhin ist wohl zu betonen, daß nur das lineare Spannungsverteilungsgesetz Naviers und nicht etwa die Bernoullische Annahme, daß die Querschnitte eben blieben, nachträglich als richtig erkannt wurde.

§ 72. **Reine Verdrehungsbeanspruchung.**

Die Untersuchungen in § 70 bezogen sich auf einen Stab, der gleichzeitig auf Biegung und auf Torsion beansprucht sein konnte. Nachdem wir die Folgerungen hervorgehoben haben, die sich aus der allgemeinen Untersuchung für die Biegungsspannungen ergeben, ist es besser, wenn wir jetzt weiterhin die Aufgabe dadurch vereinfachen, daß wir die Beanspruchung auf Verwinden für sich untersuchen. Zu diesem Zwecke setze ich also jetzt überall $\sigma_x = 0$, oder, was auf dasselbe hinauskommt,

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 0. \tag{310}$$

Mit Gl. (309) ist dieser Ansatz verträglich; er geht aus dieser Gleichung hervor, wenn man annimmt, daß in dem besonderen Falle, den wir fernerhin betrachten wollen, alle mit a bezeichneten Konstanten verschwinden.

Aus Gl. (310) folgt

$$\xi = \varphi(y, z), \tag{311}$$

wenn φ irgend eine bis jetzt unbekannte Funktion der Querschnittskoordinaten bedeutet. Mit Gl. (310) gehen ferner die Gl. (297), die den von de Saint-Vénant untersuchten Spannungszustand näher beschreiben, in die einfachere Form

$$e = 0; \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0 \tag{312}$$

über. Auch die durch die Gl. (298) ausgesprochenen allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen vereinfachen sich hier erheblich. Sie lauten jetzt

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{313}$$

Außerdem gelten auch alle übrigen Gleichungen, die wir in § 70 gefunden haben, da der hier zu behandelnde Fall in dem früheren mit enthalten ist. So erhalten wir aus den Gl. (299) und (300)

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0 \tag{314}$$

und aus den Gl. (301) und (302)

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = 0. \tag{315}$$

Wir wissen jetzt soviel von den Differentialquotienten der Funktionen η und ζ, daß wir deren analytische Form im allgemeinen angeben können. Die Funktion η muß nämlich nach Gl. (312) unabhängig von y sein und nach Gl. (314) muß sie linear sein in bezug auf x und z. Sie ist daher von der Form

$$\eta = b_0 + b_1 x + z(b_2 + b_3 x), \tag{316}$$

in der die b unbekannte, aber konstante Größen sind. Ebenso folgt für ζ

$$\zeta = c_0 + c_1 x + y(c_2 + c_3 x). \tag{317}$$

Fügen wir dazu noch die Gl. (311)

$$\xi = \varphi(yz),$$

so ist damit ein Wertsystem der Verschiebungen ξ, η, ζ angegeben, das zunächst einem möglichen Zwangszustande entspricht, falls nur die unbekannte Funktion $\varphi(yz)$ so gewählt wird, daß sie der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi(yz)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi(yz)}{\partial z^2} = 0 \tag{318}$$

genügt, und das außerdem auch die Bedingungsgleichungen (312) befriedigt, falls wir die Konstanten b und c so wählen, daß

$$\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0$$

wird. Nach Einsetzen aus Gl. (316) und Gl. (317) geht diese Bedingungsgleichung über in

$$b_2 + b_3 x + c_2 + c_3 x = 0,$$

und da diese identisch erfüllt sein muß, folgt für die Konstanten

$$c_2 = -b_2 \quad \text{und} \quad c_3 = -b_3. \tag{319}$$

Die Verschiebungen ξ, η, ζ wollten wir (vgl. § 67) auf ein Koordinatensystem beziehen, das auf dem Körper selbst festgelegt ist. Im Ursprunge ist daher

$$\xi = 0, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0.$$

Da ferner die X-Achse stets durch denselben unendlich benachbarten Punkt gehen sollte, so wird im Ursprunge auch

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0,$$

und da schließlich die XY-Ebene durch einen dritten unendlich benachbarten Punkt geführt sein sollte, muß im Ursprunge auch

$$\frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0$$

sein. Diese Festsetzungen gestatten die Bestimmung der meisten Konstanten b und c. Aus der ersten Reihe folgt nämlich

$$b_0 = 0; \quad c_0 = 0,$$

aus der zweiten

$$b_1 = 0; \quad c_1 = 0,$$

und aus der dritten Bedingung

$$c_2 = 0.$$

Hierdurch und durch die Gl. (319) werden alle Konstanten b und c bis auf eine, nämlich $b_3 = -c_3$ bekannt. Diese eine noch unbekannt gebliebene Konstante sei kurz mit c bezeichnet. Dann vereinfachen sich die Werte für die Verschiebungskomponenten wie folgt

$$\eta = cxz; \quad \zeta = -cxy; \quad \xi = \varphi(yz). \tag{320}$$

Die im Verhältnisse zu y und z nach Voraussetzung sehr kleinen Verschiebungskomponenten η und ζ lassen sich hiernach als Projektionen eines Kreisbogenelementes auf die Y- und Z-Achse auffassen, dessen Mittelpunkt auf der X-Achse liegt und das zum Zentriwinkel cx gehört. Die Konstante c bedeutet daher den auf die Längeneinheit der Welle bezogenen Verdrehungswinkel.

Die einzige erhebliche Schwierigkeit des Problems besteht jetzt noch in der Bestimmung der Funktion $\xi = \varphi(yz)$, die der Differentialgleichung (318) genügen muß. Man beachte, daß $\xi = \varphi(yz)$ für $x = 0$ die Gleichung der Fläche angibt, in die der Querschnitt $x = 0$ durch die Formänderung übergeht. Alle anderen Querschnitte nehmen dieselbe Gestalt an, da ξ unabhängig von x ist. Früher, als die heute als richtig erkannte de Saint-Vénantsche Theorie der Torsion noch nicht bekannt war, nahm man an, daß die Querschnitte eben blieben. Wir wollen zusehen, inwiefern dies richtig sein konnte. Nach dieser Annahme müßte ξ eine lineare Funktion von y und z sein; wir setzen also versuchsweise

$$\xi = \varphi(yz) = a_1 y + a_2 z, \tag{321}$$

ein Ansatz, der die Differentialgleichung (318) in der Tat be-

friedigt, also zu einem möglichen Spannungszustande führt. Nun haben wir aber noch die Grenzbedingungen an der Oberfläche der Welle zu erfüllen. Bei gewöhnlichen Torsionsaufgaben ist die Mantelfläche der Welle, abgesehen von den Stellen, wo Räder oder Riemenscheiben aufgekeilt sind, frei von äußeren Kräften. Außer den schon von vornherein gleich Null gesetzten Spannungskomponenten σ_y, σ_z, τ_{yz} muß also an der Oberfläche auch noch jene Schubspannungskomponente gleich Null sein, die in der durch die Stabachse und die Normale zur Oberfläche bestimmten Ebene liegt. Oder mit anderen Worten: die Schubspannung muß über den Querschnitt jedenfalls so verteilt sein, daß sie den Umfang überall berührt. Das war die Grenzbedingung, die wir bei der Behandlung der Torsionsfestigkeit im neunten Abschnitte überall voranstellten und sie muß natürlich auch hier noch berücksichtigt werden. Bisher war von ihr noch nicht die Rede; sie ist es aber gerade, die die noch ausstehende Bestimmung der unbekannten Funktion ξ oder φ ermöglicht oder die umgekehrt lehrt, unter welchen Umständen eine solche Lösung der partiellen Differentialgleichung (318) wie die in Gl. (321) gegebene der Wirklichkeit entspricht.

Um diese Bedingung in Form einer Gleichung ausdrücken zu können, gehe ich auf die Werte für die Spannungskomponenten τ_{xy} und τ_{xz} in den Gl. (279) zurück. Danach war

$$\tau_{xy} = G\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right); \quad \tau_{xz} = G\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right).$$

Wenn die Gleichung des Querschnittsumrisses (oder auch eines Teiles des ganzen Querschnittsumrisses) in der Form

$$z = f(y)$$

angeschrieben wird, so muß, damit die aus den Komponenten τ_{xy} und τ_{xz} resultierende Schubspannung den Querschnittsumfang berührt,

$$\frac{\tau_{xz}}{\tau_{xy}} = \frac{dz}{dy} \tag{322}$$

sein. Also haben wir noch für den Querschnittsumfang die Bedingungsgleichung

$$\frac{\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}}{\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}} = \frac{dz}{dy}, \tag{323}$$

oder, wenn man die Werte von η und ζ aus Gl. (320) einsetzt,

$$\frac{\frac{\partial \xi}{\partial z} - cy}{\frac{\partial \xi}{\partial y} + cz} = \frac{dz}{dy}. \tag{324}$$

Dieser Gleichung muß ξ überall an der Oberfläche genügen, wenn die Oberfläche frei von äußeren Kräften sein soll und zwar nicht nur für den besonderen Fall, den wir hier untersuchen, sondern ganz allgemein.

Wir prüfen jetzt, unter welchen Umständen der in Gl. (321) aufgestellte Wert von ξ auch dieser Grenzbedingung genügt. Gl. (324) geht hier über in

$$\frac{a_2 - cy}{a_1 + cz} = \frac{dz}{dy}.$$

Diese gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung kann sofort integriert werden. Durch Trennung der Variablen erhält man

$$(a_2 - cy)dy = (a_1 + cz)dz$$

oder nach Integration

$$a_1 z + \frac{c}{2} z^2 - a_2 y + \frac{c}{2} y^2 = K.$$

Das ist aber, wie man aus der Gleichheit der Koeffizienten von y^2 und z^2 erkennt, die Gleichung eines Kreises. Damit ist bewiesen, daß nur bei kreisförmigen Querschnitten nach der Torsion alle Punkte, die vorher auf einem Querschnitte lagen, auch nachher noch in einer Ebene enthalten sein können. In allen anderen Fällen geht die Querschnittsebene in eine gekrümmte Fläche über. Die Kritik, die wir jetzt üben, fällt daher bei der Verdrehung ganz anders aus als bei der Biegung. Während dort wenigstens die Span-

nungsverteilung der Navierschen Theorie bestätigt wurde, erkennen wir hier, daß die ältere Theorie der Torsion falsch war mit einziger Ausnahme des kreisförmigen Querschnittes und man muß wohl beachten, daß dieser wichtige Aufschluß, der inzwischen freilich schon auf die ganze Gestaltung der elementaren Theorie der Torsion zurückgewirkt hat, erst durch die strenge Elastizitätstheorie gegeben wurde. — Zugleich bildet übrigens das eben gewonnene Resultat eine willkommene Bestätigung der früher vorgetragenen Theorie der Torsion für Wellen von kreisförmigem Querschnitte.

§ 73. Fortsetzung für den elliptischen Querschnitt.

Für Gl. (318) kann man beliebig viele Lösungen angeben. Jede dieser Lösungen entspricht einem möglichen Spannungszustande. Damit dieser wirklich zu Stande komme, muß man aber noch für die Erfüllung der Grenzbedingungen an der Körperoberfläche Sorge tragen. Besteht die Grenzbedingung an der Mantelfläche des Stabes darin, daß diese frei von äußeren Kräften sein soll, so wird sie, wie wir schon sahen, durch Gl. (324) zum Ausdrucke gebracht. Man kann nun entweder so verfahren, daß man irgend eine beliebige Lösung der partiellen Differentialgleichung (318) annimmt und dann nach Gl. (324) die Gestalt des Querschnittes bestimmt, für die diese Lösung zutrifft oder man kann umgekehrt verlangen, für eine gegebene Querschnittsform die passende Lösung der Gl. (318) zu finden. Die letzte Aufgabe ist indessen weitaus schwieriger zu lösen und für beliebig gegebene Querschnittsformen, also z. B. für einen I-förmigen Querschnitt oder dgl. ist sie bisher überhaupt nicht streng gelöst worden. Für den rechteckigen Querschnitt ist dies allerdings gelungen, aber nur durch Reihenentwicklungen schwieriger Art, mit denen sich weiterhin doch nicht viel anfangen läßt.

Viel einfacher ist dagegen das andere Verfahren, zunächst irgend eine Lösung der Gl. (318) anzunehmen und dann die

Gestalt des Querschnittes aufzusuchen, für die diese Lösung zutrifft. Die allgemeinste Lösung der Gl. (318) ist nämlich wohlbekannt; sie lautet

$$\xi = \varphi(yz) = f_1(y + iz) + f_2(y - iz), \tag{325}$$

wenn i die imaginäre Einheit und f_1 und f_2 ganz beliebige Funktionszeichen sind. Daß Gl. (325) die Differentialgleichung (318) befriedigt, folgt durch Einsetzen des Wertes, und daß Gl. (325) zugleich die allgemeinste Lösung angibt, folgt daraus, daß sie zwei willkürliche Funktionen enthält. Je nach den Formen der Funktionen f_1 und f_2 kann man nun beliebig viele partikuläre Lösungen angeben und zwar bildet sowohl der reelle als der imaginäre Teil von Gl. (325) für sich genommen eine Lösung. Man kann also z. B. auch die allgemeinste Form von Potenzreihen, die mit Gl. (318) verträglich ist, hiernach ohne weiteres anschreiben, nämlich, wenn wir uns auf ganze positive Exponenten beschränken,

$$\left.\begin{aligned} \xi = a_0 + a_1(y + iz) + a_2(y + iz)^2 + \cdots \\ + b_1(y - iz) + b_2(y - iz)^2 + \cdots \end{aligned}\right\}, \tag{326}$$

in der die a und b ganz beliebige Koeffizienten sein können.

In diesen vielgestaltigen Formen ist als eine der einfachsten auch die folgende enthalten

$$\xi = \varphi(yz) = ayz. \tag{327}$$

Daß sie überhaupt die Gl. (318) befriedigt, erkennt man beim Einsetzen in diese Gleichung sofort. Daß sie aber auch in der Form (326) mit enthalten ist, folgt daraus, daß man sie als den imaginären Anteil von

$$\xi = \frac{a}{4}(y + iz)^2 - \frac{a}{4}(y - iz)^2$$

betrachten kann. Wir wollen für diese besondere Form des Wertes von ξ den zugehörigen Querschnittsumriß nach Gl. (324) bestimmen. Diese Gleichung geht hier über in

$$\frac{(a - c)y}{(a + c)z} = \frac{dz}{dy}, \tag{328}$$

die sich auch in der Form

$$(a + c)z dz + (c - a)y dy = 0$$

schreiben läßt. Die Integration liefert

$$(a + c)\frac{z^2}{2} + (c - a)\frac{y^2}{2} = K,$$

wofür man auch

$$\frac{y^2}{a + c} + \frac{z^2}{c - a} = \frac{2K}{(a + c)(c - a)} = K' \tag{329}$$

schreiben kann, wenn K' irgend eine neue unbekannte Integrationskonstante bedeutet. In Gl. (329) erkennt man aber die Mittelpunktsgleichung einer Ellipse, deren Achsen in die Richtungen der Koordinatenachsen fallen. Das Achsenverhältnis ist $\sqrt{c + a} : \sqrt{c - a}$. Voraussetzung ist, daß a dem Absolutwerte nach jedenfalls kleiner ist, als c.

Für die Schubspannungskomponenten erhält man durch Einsetzen in die früheren Formeln

$$\left.\begin{aligned} \tau_{xy} &= G\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) = G\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + cz\right) = G(a + c)z, \\ \tau_{xz} &= G\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) = G\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} - cy\right) = -G(c - a)y. \end{aligned}\right\} \tag{330}$$

Damit diese Lösung eine wirkliche sei, ist jetzt nur noch erforderlich, daß an den Endquerschnitten des Stabes das verdrehende Moment der äußeren Kräfte in derselben Verteilung über den Querschnitt angebracht sei, wie wir sie hier für die Schubspannungsverteilung in irgend einem anderen Querschnitte gefunden haben. Tatsächlich wird dies freilich in praktisch vorkommenden Fällen nicht zutreffen. Man muß sich aber dann an die Auseinandersetzungen in § 71 erinnern, nach denen es für solche Stellen, die weit genug vom Lastangriffe entfernt liegen, ziemlich gleichgültig ist, auf welche besondere Art die Last angebracht ist.

Wenn wir das Resultat, zu dem wir jetzt gelangt sind, mit der früheren Untersuchung über die Verdrehungsfestigkeit

der elliptischen Welle vergleichen, finden wir, daß die damals hypothetisch angesetzten Gleichungen (227), S. 311

$$\tau_{xy} = ka^2z; \quad \tau_{xz} = -kb^2y$$

der Form nach vollständig mit den Gl. (330) übereinstimmen. Jener willkürliche Ansatz hat sich daher bei der eingehenderen Untersuchung jetzt als genau richtig erwiesen. Es ist daher nicht nötig, hier noch weitere Folgerungen aus den Gl. (330) zu ziehen; vielmehr genügt es, auf die früheren Darlegungen im neunten Abschnitte zu verweisen.

Nur eine Bemerkung möge hier noch Platz finden. Gl. (327) ist zugleich die Gleichung der krummen Fläche, in die der vormals ebene Querschnitt durch die Verdrehung übergeht. Das ist aber die Gleichung eines hyperbolischen Paraboloides. Denkt man sich, nachdem die Verwindung erfolgt ist, von neuem eine Anzahl ebener Schnitte senkrecht zur Achse gelegt, so schneiden diese die krummen Flächen, in die die vorher ebenen Querschnitte übergegangen sind, in gleichseitigen Hyperbeln; Schnitte, die durch die Achse gelegt sind, ergeben Parabeln.

§ 74. **Hydrodynamisches Gleichnis.**

Oft genug läßt sich eine Aufgabe aus einem Gebiete der theoretischen Physik auf eine Aufgabe aus einem ganz anderen Gebiete zurückführen. Jeder Vergleich dieser Art ist lehrreich und nützlich. Eine strenge Lösung wird zwar, da sie bei jeder von beiden Aufgaben gleich schwer zu finden ist, durch den Vergleich vielleicht nicht erleichtert. Dagegen sind näherungsweise Lösungen bei einer von beiden Aufgaben oft mit Leichtigkeit anzugeben und hiermit auf die andere Aufgabe zu übertragen, bei der sie sonst viel schwerer zu finden gewesen wären.

Für das Torsionsproblem hat man zwei Vergleiche dieser Art aufgestellt, die sich als sehr fruchtbar erwiesen haben. Den einen davon, das „hydrodynamische Gleichnis", werde ich

hier kurz besprechen, während ich mir vorbehalte, im 5. Bande darauf von neuem zurückzukommen und auch den anderen von Prandtl herrührenden Vergleich des Torsionsproblems mit der Gestalt einer belasteten Membran beizufügen. Indessen ist auch hier schon von der Arbeit von Prandtl Einiges benützt.

Man denke sich, von einem Punkte des Querschnittes ausgehend, eine Linie gezogen, die in der Richtung der resultierenden Schubspannung τ immer weiter verlängert wird. Alle Linien, die sich in dieser Weise ziehen lassen, wollen wir uns in den Querschnitt eingetragen denken, so daß durch jeden Punkt eine davon geht. Der einfacheren Bezeichnung wegen sollen diese Linien die Spannungslinien und die Gesamtheit der Linien, die den ganzen Querschnitt ausfüllen, das Spannungsfeld genannt werden. Von solchen Konstruktionen macht man oft Gebrauch, um sich über die Verteilung einer gerichteten Größe von irgend einer Art in einem gegebenen Gebiete Klarheit zu verschaffen. Am meisten bekannt ist dieses Verfahren in der Lehre vom Magnetismus, wo man die in dieser Weise gezogenen Linien als die Kraftlinien bezeichnet.

Immer, wenn man von dieser Veranschaulichung Gebrauch macht, ist es nützlich, sich noch eines damit zusammenhängenden Bildes zu erinnern. Man kann sich nämlich eine Flüssigkeit vorstellen, die überall in der Richtung der Kraftlinien, oder hier der Spannungslinien strömt, so daß zugleich die Geschwindigkeit der Strömung überall proportional der Größe der Kraft oder der Spannung ist. Diese Flüssigkeitsbewegung ist ebenfalls sehr geeignet, ein anschauliches Bild von dem Felde zu entwerfen, mit dem man es gerade zu tun hat und in der Lehre vom Magnetismus spielt der daraus hervorgegangene Begriff des „Kraftflusses" eine große Rolle.

Wir wollen jetzt sehen, wie wir die allgemeinen Bedingungsgleichungen, denen unsere Aufgabe unterworfen ist, umformen müssen, um sie der neu gewählten Darstellungsweise anzupassen. Am einfachsten gelingt dies mit der Grenzbedingung, die durch Gl. (324) ausgesprochen war. Wir können sie jetzt

einfach dahin in Worte fassen, daß die Flüssigkeitsströmung am Umfange überall in der Richtung der Tangente erfolgen muß, d. h. gerade so wie eine Flüssigkeitsströmung ohnehin erfolgt, wenn sie rings von festen Wänden eingeschlossen ist.

Bezeichnet man die Geschwindigkeitskomponenten der Strömung mit v_y und v_z, und versteht man unter m einen Proportionalitätsfaktor, durch den der bei der Abbildung zugrunde gelegte Maßstab zum Ausdrucke gebracht wird, so hat man

$$\left.\begin{aligned} v_y &= m\tau_{xy} = mG\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + cz\right) \\ v_z &= m\tau_{xz} = mG\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} - cy\right) \end{aligned}\right\}. \tag{331}$$

Die Gleichgewichtsbedingung der Spannungen am Volumenelemente gegen Verschieben in der Richtung der X-Achse erfordert, daß

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$

ist, woraus sofort

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \tag{332}$$

folgt. Setzt man in diese Gleichung die Werte aus (331) ein, so erhält man

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = 0,$$

womit auch Gl. (318) erfüllt ist.

Gl. (332) spricht die „Kontinuitätsbedingung" der Hydrodynamik aus, wie im 4. Bande näher erörtert wird. Sie sagt daher aus, daß eine gewöhnliche Wasserströmung zur Abbildung des Spannungsfeldes ausreicht, ohne daß es nötig wäre, Quellen oder Sickerstellen anzunehmen, um den Fluß in dieser Form zu ermöglichen.

Um ferner noch die Bedingung auszusprechen, daß sich v_y und v_z nach den Gl. (331) in derselben Funktion ξ darstellen lassen müssen, differentiieren wir die erste dieser Gleichungen nach z und die zweite nach y und subtrahieren hierauf beide voneinander. Dadurch erhalten wir

$$\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = -2mGc. \tag{333}$$

Die linke Seite dieser Gleichung stellt die Intensität des „Wirbels“ der Flüssigkeitsströmung dar und die Gleichung spricht aus, daß die Flüssigkeit an allen Stellen mit derselben Stärke $2mGc$ wirbelt.

Hiermit ist die Flüssigkeitsbewegung vollständig bestimmt; nur auf eine einzige Art ist es nämlich möglich, daß die Wirbelstärke überall einen gegebenen konstanten Wert hat, wenn die inkompressible Flüssigkeit in dem durch den Querschnitt angegeben Raume stetig herumfließen soll und dabei rings von festen Wänden eingeschlossen ist.

Die Vorstellung unserer Aufgabe unter diesem Bilde kann nun insofern von Nutzen sein, als dadurch gewisse Schätzungen oder auch genaue Rechnungen nach den Lehren der Hydrodynamik erleichtert werden. Als Beispiel dafür wollen wir zunächst ein auf Verwindung beanspruchtes Flacheisen betrachten, also einen Stab von rechteckigem Querschnitt, von dem eine Querschnittsseite viel größer ist, als die andere. Die Strömungs- oder Spannungslinien müssen wegen der ihnen auferlegten Bedingungen ungefähr so im Querschnitte verlaufen, wie in Abb. 80 angegeben ist. Die äußerste Stromlinie fällt nämlich mit dem Umrisse zusammen und auch die etwas weiter nach innen zu liegenden laufen den Langseiten auf längere Strecken hin ohne merkliche Krümmung nahezu parallel. An diesen Stellen kann daher v_y und auch $\frac{\partial v_y}{\partial z}$ genau genug gleich Null gesetzt werden, woraus nach Gl. (333)

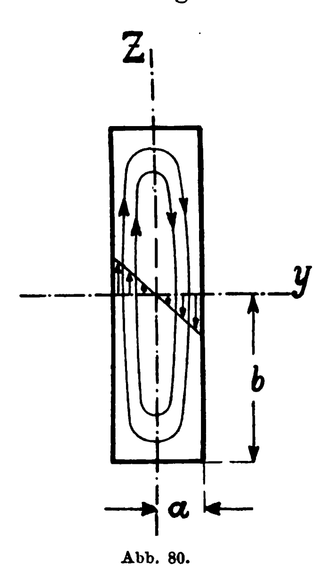


Abb. 80.

$$\frac{\partial v_z}{\partial y} = -2mGc \tag{334}$$

folgt. Wegen der Bedeutung von v_z kann dies auch in der Form

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = -2Gc \tag{335}$$

geschrieben werden. Die Spannung längs der Y-Achse wächst daher proportional mit dem Abstande von der Z-Achse und das Spannungsverteilungsdiagramm nimmt die in Abb. 80 eingetragene geradlinige Gestalt an. — Daß die Spannung in der Mitte der Langseite größer wird, als an irgend einer anderen Stelle des Querschnittes, folgt daraus, daß sich die Stromlinien an dieser Stelle dichter zusammendrängen müssen, als in der Nähe der Schmalseiten; die Geschwindigkeit der Strömung und daher die Spannung ist daher größer, als dort.

Man betrachte ferner zwei unendlich benachbarte Spannungslinien, die auf der Y-Achse um dy voneinander entfernt sind. Die Spannung τ_{xz} an dieser Stelle ist

$$\tau_{xz} = \tau_{\max} \cdot \frac{y}{a}, \tag{336}$$

wenn y den Abstand vom Ursprunge bedeutet. Alle Spannungen, die in dem zwischen beiden Spannungslinien liegenden schmalen Streifen übertragen werden, setzen sich zu einem Kräftepaare zusammen, dessen Moment mit dM bezeichnet werden möge. Um dM zu berechnen, beachte man, daß durch jeden Querschnitt des Streifens dieselbe Flüssigkeitsmenge fließt und daß daher in jedem Längenelemente ds eine Spannung übertragen wird, die überall mit ds proportional ist und gleich

$$\tau_{\max} \frac{y}{a} dy\,ds$$

gesetzt werden kann, wenn hier immer noch dy den Abstand der beiden Spannungslinien oder die Streifenbreite auf der Y-Achse bedeutet. Diese Spannung geht überall in der Richtung der Tangente an die Spannungslinie und wenn man den senkrechten Abstand der Tangente vom Ursprunge, der als Momentenpunkt gewählt wird, mit p bezeichnet, hat man

$$dM = \int \tau_{\max} \cdot \frac{y}{a}\, p\, dy\, ds = \tau_{\max} \frac{y}{a}\, dy \int p\, ds$$

wobei die Integration über den ganzen Umfang der Spannungslinie auszudehnen ist. Das Integral hat aber eine einfache Bedeutung, denn $p\,ds$ gibt den doppelten Inhalt des Dreiecks an, dessen Grundlinie ds ist, während der Ursprung die gegenüber liegende Ecke bildet. Die Summe aller dieser Dreiecke stellt den Inhalt der Fläche dar, die von der im Abstande y vom Ursprunge die Y-Achse treffenden Spannungslinie eingeschlossen wird. Bezeichnet man diesen Flächeninhalt mit F, so erhält man

$$dM = \tau_{\max} \frac{y}{a}\, dy \cdot 2F \quad \text{und daher} \quad M = 2\, \frac{\tau_{\max}}{a} \int_0^a F y\, dy,$$

wobei M das Torsionsmoment ist. Nun kann freilich die Integration nicht ausgeführt werden, so lange man F nicht als Funktion von y darstellen kann, d. h. so lange man nicht genau weiß, wie die Spannungslinien verlaufen. Ungefähr kennt man aber ihren Verlauf; man weiß namentlich, daß die äußeren Spannungslinien, auf die es hauptsächlich ankommt, weil bei ihnen sowohl die Spannungen als die Hebelarme am größten sind, nicht viel von Rechtecken verschieden sein können. Setzt man daher näherungsweise

$$F = 4yb,$$

so wird man zwar F sicher zu groß rechnen, aber bei einem sehr schmalen Rechtecke (schmaler als es in Abb. 80 der Deutlichkeit wegen gezeichnet war) kann der Fehler nicht sehr groß ausfallen. Es mag noch bemerkt werden, daß eine genauere Theorie, auf die erst im 5. Bande eingegangen werden kann, lehrt, daß man an Stelle von b in dem vorhergehenden Ausdrucke eigentlich $b - 0{,}63\,a$ setzen sollte. Wenn b weit größer ist, als a, kommt es aber auf diese geringfügige Verbesserung nicht an. Ich setze also F so ein, wie angegeben und erhalte

$$M = 8\, \frac{\tau_{\max}}{a}\, b \int_0^a y^2 dy = \frac{8}{3}\, \tau_{\max}\, a^2 b,$$

hiermit wird endlich

$$\tau_{\max} = \frac{3M}{8a^2b} = \frac{3M}{a_1{}^2 b_1}, \tag{337}$$

wenn mit a_1 und b_1 die ganzen Rechteckseiten bezeichnet werden.

Diese Formel liefert, wie aus ihrer Ableitung hervorgeht, die Spannung $\tau_{\max}$ sicher etwas zu klein. Bei sehr schmalen Rechtecken kommt dieser Wert aber der Wahrheit erheblich näher, als die in § 59 abgeleitete Formel (238)

$$\tau_{\max} = \frac{9M}{2a_1{}^2 b_1},$$

die im übrigen bei Rechtecken, die sich nicht allzuviel von Quadraten unterscheiden, den Vorzug vor Gl. (337) verdient.

Auch die Konstante c, die nach § 72 den auf die Längeneinheit der Welle bezogenen Verdrehungswinkel angibt, kann jetzt leicht berechnet werden. Nach Gl. (336) hat man für die auf der Y-Achse gelegenen Punkte

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = \frac{\tau_{\max}}{a} = \frac{3M}{8a^3b}$$

und nach Gl. (335) folgt daraus für c, vom Vorzeichen, das hier gleichgültig ist, abgesehen

$$c = \frac{3M}{16a^3bG}. \tag{338}$$

Für die Länge l wird daher der Verdrehungswinkel $\Delta\varphi$, wenn man noch die ganzen Rechteckseiten a_1 und b_1 einführt,

$$\Delta\varphi = \frac{3Ml}{a_1{}^3 b_1 G}. \tag{339}$$

Indessen ist auch diese Formel nur für schmale Rechtecke zu verwenden; bei Rechtecken, deren Seiten von gleicher Größenordnung sind, ist die auf S. 325 für $\Delta\varphi$ abgeleitete Näherungsformel als genauer zu betrachten.

Als zweites Beispiel betrachten wir ein sogenanntes

E-Eisen, d. h. einen Stab von der in Abb. 81 gezeichneten Querschnittsgestalt. Auch hier müssen die Stromlinien ihrem allgemeinen Verlaufe nach den Umrißlinien des Querschnittes folgen. In den geradlinigen Teilen des Querschnittes gleicht daher der Verlauf der Spannungslinien und hiermit auch die Spannungsverteilung der im vorigen Beispiele besprochenen. Die Torsionssteifigkeit des Stabes kann daher nicht höher veranschlagt werden, als die eines Flacheisens, das aus ihm durch Umbiegen der beiden Flantschen erhalten werden könnte. Damit sie auch nur so hoch werden kann, muß überdies vorausgesetzt werden, daß die nach innen zu einspringenden Ecken eine hinreichende Abrundung erhalten haben, um eine stärkere Zusammendrängung der Stromlinien, und hiermit eine größere Spannung an diesen Stellen zu vermeiden.

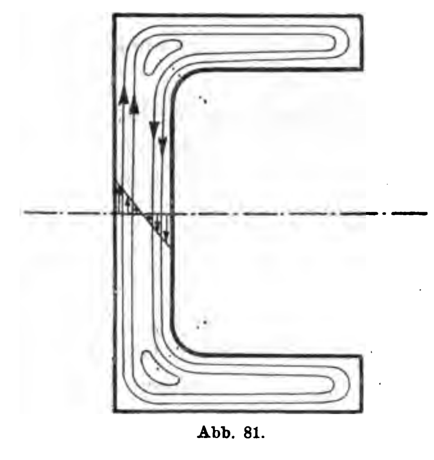


Abb. 81.

Weit höher fällt dagegen die Torsionssteifigkeit aus, wenn der Querschnitt eine ringförmig geschlossene Figur bildet, etwa wie in Abb. 82. Bei einem solchen Rohre können die benachbarten Stromlinien alle im gleichen Sinne weiter fließen, ohne durch denselben Schenkel auch wieder

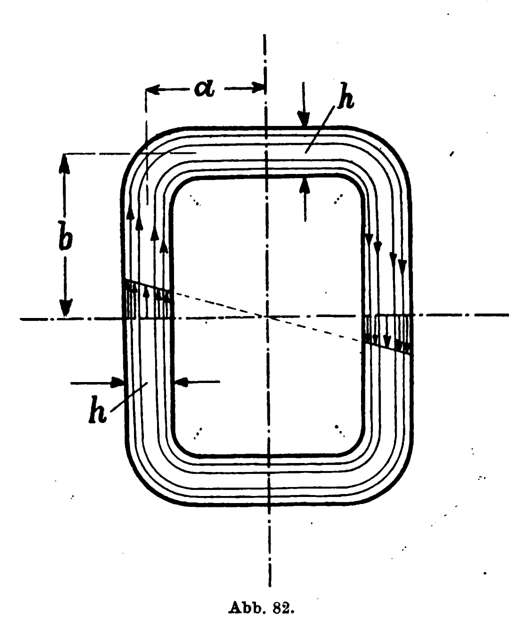


Abb. 82.

zurücklaufen zu müssen. Das sich hiernach ergebende Spannungsverteilungsdiagramm ist in die Abbildung eingetragen. Man sieht, daß bei sehr dünner Rohrwand die Spannung an allen Stellen nahezu gleich groß wird. Der Mittelwert τ der Spannung folgt für den in der Abbildung dargestellten Fall aus der größten Spannung τ_{max} an der äußeren Kante zu

$$\tau = \tau_{max} \cdot \frac{a}{a + \frac{1}{2} h}$$

und die Momentengleichung für das Gleichgewicht zwischen den Spannungen und dem Verdrehungsmomente kann genau genug in der Form

$$\tau \cdot 4bh \cdot a + \tau \cdot 4ah \cdot b = M$$

angeschrieben werden, woraus

$$\tau_{max} = \frac{a + \frac{1}{2} h}{a} \cdot \frac{M}{8abh} \tag{340}$$

folgt. Auch hierbei ist eine hinreichende Ausrundung der nach innen hin einspringenden Ecken vorausgesetzt, da sonst die Spannung an diesen Stellen erheblich größer werden könnte, als an den äußeren Kanten.

Sobald aber ein solches Rohr der Länge nach aufgeschlitzt wird, womit der Querschnitt die in Abb. 83 (s. S. 402) dargestellte Gestalt annimmt, verliert es den größten Teil seiner Torsionssteifigkeit. Die Stromlinien müssen jetzt an der Schlitzstelle wieder umkehren; ihr Verlauf ist daher ganz ähnlich wie in Abb. 81 und die Torsionsfestigkeit ist ungefähr ebenso niedrig einzuschätzen, wie bei einem Flacheisen von derselben Dicke, dessen Breite gleich der Länge des Umfanges ist.

Auch auf die vielfach angewendeten I- und L-Eisen können diese Betrachtungen sofort übertragen und zur Abschätzung ihrer Torsionssteifigkeit verwendet werden.

Zu einem bemerkenswerten Resultate gelangt man durch die hydrodynamische Betrachtung auch, wenn man sie auf den Fall anwendet, daß irgendwo im Querschnitte ein kleiner Sprung (Gußfehler od. dgl.) auftritt. Wir wollen annehmen, daß dieser Fehler durch ein kleines kreisförmiges Loch

im Querschnitte dargestellt werden kann. Dadurch wird das Spannungsfeld nur in der Umgebung des Loches merklich geändert; die Spannungslinien können jetzt nicht mehr durch die Fläche des Loches weiter gehen, sondern müssen ausbiegen und um den Rand des Loches herumfließen. Man sieht schon ohne weiteres ein, daß an den Rändern des Loches die Geschwindigkeit dadurch gesteigert werden muß. Diese Geschwindigkeit entspricht aber der Spannung und damit der Beanspruchung des Materiales in der verdrehten Welle. In der Tat kann man auch zahlenmäßig den Einfluß des Sprunges leicht nachweisen; es zeigt sich, daß die Spannung am Rande dadurch gerade auf das Doppelte erhöht wird. Auf die Durchführung der Rechnung verzichte ich hier, da sie auf hydrodynamischen Betrachtungen beruht, die ich hier noch nicht als bekannt voraussetzen kann.

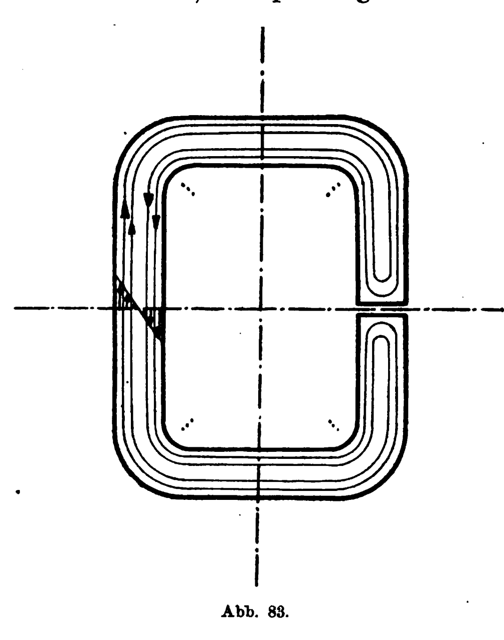


Abb. 83.

§ 75. Die Härte.

Die Härte ist eine Oberflächenfestigkeit, die dann hervortritt, wenn man zwei Körper, die sich anfänglich nur in einem Punkte oder längs einer Linie berührten, aufeinander drückt, so daß sie sich abplatten, bis sie eine Beschädigung, also entweder einen Sprung oder einen bleibenden Eindruck erfahren. Die elastische Formänderung, die bei dieser Art der Belastung eintritt, wurde von Hertz nach den Methoden der mathematischen Elastizitätstheorie untersucht. Hier beschränke ich mich

auf die Angabe der wichtigsten Resultate dieser Untersuchung, während ich mir vorbehalte, im fünften Bande ausführlicher darauf zurückzukommen.

Als streng richtig sind übrigens die Hertzschen Formeln nicht anzusehen, weil sie auf einen Umstand keine Rücksicht nehmen, der, wie es scheint, bei den Härteerscheinungen eine erhebliche Rolle spielt. Die oberflächlichen Schichten eines festen Körpers verhalten sich nämlich anders, als die nach innen hin liegenden. Bei den flüssigen Körpern sprechen sich die besonderen Eigenschaften der Oberflächenschichten in den Kapillarerscheinungen aus; sie sind daher schon seit langer Zeit bekannt und genauer untersucht. Bei den festen Körpern bestehen aber, wie aus den Härteversuchen hervorgeht, solche Unterschiede offenbar ebenfalls. Daß sie nur bei der Härte und nicht bei den anderen Beanspruchungsarten eines festen Körpers hervortreten, liegt daran, daß die Härte in erster Linie auf der Festigkeit der Oberflächenschicht beruht und die inneren Teile dabei nur wenig in Mitleidenschaft gezogen werden, während sich bei allen anderen Beanspruchungsarten die Spannungen tief ins Innere des Körpers hinein erstrecken, so daß die Oberflächenschichten nur einen kleinen Teil davon aufzunehmen haben.

Immerhin haben sich die hier mitzuteilenden Formeln von Hertz im wesentlichen bewährt und sie werden daher in der Technik neuerdings häufig benutzt.

Beide Körper seien zunächst ohne Druck in einem Punkte zur Berührung gebracht. Man denke sich alle Punkte beider Oberflächen in der nächsten Nachbarschaft des Berührungspunktes aufgesucht, die einen sehr kleinen konstanten Abstand e in der Richtung der Berührungsnormalen voneinander besitzen. Bei ihrer Projektion auf die Berührungsebene geben diese Punkte im allgemeinen eine Ellipse, die aber in den Fällen, von denen jetzt die Rede sein soll, in einen Kreis übergeht.

Bei der Abplattung, die die Körper erfahren, wenn man sie mit einer Kraft P aufeinander drückt, berühren sie sich

in einer kleinen Fläche, die man als die Druckfläche bezeichnet. Auch die Druckfläche wird ein Kreis, wenn die vorher besprochene Kurve ein Kreis war. Man kann nun fragen, wie groß die Druckfläche ist, die zu einer gegebenen Last P gehört, wie sich ferner die Last P über die Druckfläche verteilt, wie groß also insbesondere der Druck in der Mitte wird, wo er am größten ausfällt, und wie groß endlich die Abplattung ist, d. h. um wieviel sich beide Körper infolge der elastischen Formänderung einander nähern.

Diese Fragen werden durch die Untersuchung von Hertz beantwortet, wobei jedoch, abgesehen von dem zuvor besprochenen verschiedenen Verhalten der oberflächlichen und der inneren Schichten, auf das keine Rücksicht genommen wird, selbstverständlich auch vorausgesetzt werden muß, daß die Last P nicht so groß werden darf, um an irgend einer Stelle eine Überschreitung der Proportionalitätsgrenze herbeizuführen. Unter dieser Voraussetzung gilt zunächst, daß der auf die Flächeneinheit bezogene Druck σ am Rande der Druckfläche gleich Null ist und nach der Mitte hin anwächst wie die Ordinate einer über der Druckfläche konstruierten Halbkugel. Der größte Wert σ_0 von σ ist daher $1\frac{1}{2}$mal so groß als der Durchschnittswert für die ganze Druckfläche. Ferner wächst der Halbmesser der Druckfläche proportional mit der dritten Wurzel aus der Last P. In demselben Maße wächst daher auch die Spannung σ_0 und hiermit die Beanspruchung des Materials. Die Annäherung α beider Körper infolge der Abplattung wächst dagegen proportional mit der zweidrittelten Potenz von P.

Für zwei Kugeln aus demselben Materiale vom Elastizitätsmodul E mit den Halbmessern r_1 und r_2 erhält man, wenn die Poissonsche Verhältniszahl $m = \frac{10}{3}$ gesetzt wird, für den Halbmesser a der Druckfläche

$$a = 1{,}11 \sqrt[3]{\frac{P}{E} \cdot \frac{r_1 r_2}{r_1 \pm r_2}} . \qquad (341)$$

Das untere Vorzeichen im Nenner ist zu nehmen, wenn die eine Kugel eine Hohlkugel ist. Ferner wird

$$\sigma_0 = 0{,}388\sqrt[3]{PE^2\left(\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2}\right)^2}, \tag{342}$$

$$a = 1{,}23\sqrt[3]{\frac{P^2}{E^2} \cdot \frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2}}. \tag{343}$$

Praktisch wichtig ist namentlich der Fall, daß an Stelle der einen Kugel eine Platte tritt. Man braucht dann nur den betreffenden Halbmesser in den vorausgehenden Formeln unendlich groß zu setzen. Dadurch erhält man für eine Platte und eine Kugel vom Halbmesser r

$$a = 1{,}11\sqrt[3]{\frac{Pr}{E}}, \tag{344}$$

$$\sigma_0 = 0{,}388\sqrt[3]{\frac{PE^2}{r^2}}, \tag{345}$$

$$a = 1{,}23\sqrt[3]{\frac{P^2}{E^2 r}}. \tag{346}$$

Ferner erhält man für zwei rechtwinklig gekreuzte Zylinder von demselben Halbmesser r

$$\sigma_0 = 0{,}388\sqrt[3]{\frac{PE^2}{r^2}}. \tag{347}$$

Praktisch wichtig ist ferner noch der Fall, daß sich zwei Zylinder von den Halbmessern r_1 und r_2 längs einer Erzeugenden berühren. Man muß sich die Zylinder unendlich lang denken. Die eine Halbachse der Druckellipse wird dann auch unendlich groß und für die andere erhält man

$$a = 1{,}52\sqrt{\frac{P'}{E} \cdot \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}}, \tag{348}$$

$$\sigma_0 = 0{,}418\sqrt{P'E\,\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2}}. \tag{349}$$

Die Wurzeln sind hier Quadratwurzeln, worauf ich ausdrücklich aufmerksam mache; unter P' ist der Druck auf die Längeneinheit der Zylinder zu verstehen; P' hat daher die Dimension kg/cm.

Wenn einer der Zylinder durch eine Platte ersetzt wird (z. B. bei den Walzenlagern der Brückenträger) wird

$$a = 1{,}52\sqrt{\frac{P'r}{E}}, \tag{350}$$

$$\sigma_0 = 0{,}418\sqrt{\frac{P'E}{r}}. \tag{351}$$

Vorausgesetzt wird dabei, daß die Platte hinreichend dick ist, so daß die Spannungen sich nahezu so verteilen, als wenn die Dicke unendlich groß wäre.

Wenn man die Walzenlager eines Brückenträgers nach diesen Formeln berechnet, darf man übrigens, wie die Erfahrung lehrt, wegen der besonderen Umstände des Falles die zulässige Beanspruchung σ_0 in der Mitte der Druckfläche weit höher annehmen (vielleicht 3000 atm oder selbst noch mehr) als sonst ratsam wäre.

Wegen des besonderen Einflusses der Oberflächenschichten auf die Härte ist es nicht möglich, die Härte eines Körpers im voraus zu berechnen, wenn seine übrigen Festigkeitseigenschaften, insbesondere seine Zug- und Druckfestigkeit gegeben sind. Man muß die Härte vielmehr durch einen besonderen Versuch vermitteln. Hertz schlug vor, zwei Körper, etwa zwei Kugeln oder eine Kugel und eine Platte aus dem auf seine Härte zu prüfenden Stoffe herzustellen, sie aufeinander zu drücken, bis eine Beschädigung entsteht und hierauf die Härte in der zugehörigen Spannung σ_0 nach den vorher angeführten Formeln auszudrücken. Das hat sich aber als nicht ausführbar herausgestellt. Zunächst läßt sich beim Versuche gewöhnlich nicht genau erkennen, bei welcher Last die erste Beschädigung entsteht. Bei einem sehr spröden Körper kann man zwar annehmen, daß die erste Beschädigung in einem

Sprunge besteht, der deutlich wahrnehmbar ist. Aber auch für solche Körper, wie z. B. Glas, gelingt es nicht, die Härte nach dem Vorschlage von Hertz zu bestimmen. Der Versuch zeigt nämlich, daß der beim Eintreten des Sprunges auftretende Wert von σ_0 von den Krümmungshalbmessern der aufeinander gedrückten Kugeln abhängt, was mit der Hertzschen Theorie im Widerspruche steht. Gerade diese Erfahrung ist der deutlichste Beweis dafür, daß die Härte von den besonderen Eigenschaften der Oberflächenschicht abhängt, die in der Hertzschen Theorie nicht berücksichtigt sind.

Bei den Metallen ist es überhaupt nicht möglich, das Eintreten der ersten Beschädigung, die in einem sehr kleinen bleibenden Eindrucke besteht, mit halbwegs ausreichender Sicherheit zu erkennen. Um zu einem zahlenmäßigen Ausdrucke für die Härte eines Metalls, z. B. einer Stahlsorte zu gelangen, muß man daher auf andere Weise vorgehen.

Die beste Versuchsanordnung besteht darin, daß man zwei Zylinder aus dem betreffenden Metalle herstellt, sie kreuzweise aufeinander legt und der Reihe nach mit verschiedenen Lasten P aufeinander drückt, so daß bleibende Eindrücke von verschiedener Größe entstehen. Wegen des verschiedenen Einflusses der Oberflächenschicht bei verschiedenen Zylinderdurchmessern soll der Durchmesser stets gleich 4 cm gewählt werden, um zu vergleichbaren Ergebnissen zu gelangen. Die Lasten P wählt man so, daß dadurch bleibende Eindrücke von $2^1/_2$ bis 4 mm Durchmesser hervorgerufen werden. Jede dieser Lasten dividiert man durch den Inhalt der zugehörigen Druckfläche. Aus den dadurch erhaltenen Zahlen, die nicht viel voneinander abweichen, nimmt man das Mittel und betrachtet dieses als Maß für die Härte des Körpers.

Da dieser Versuch immerhin etwas umständlich ist, hat man sich neuerdings häufig damit begnügt, die Härte eines Schienenstahls dadurch zu bestimmen, daß man eine sehr harte Gußstahlkugel darauf drückt und die Härte aus den dabei verursachten Eindrücken, ähnlich wie beim vorigen Versuche, ermittelt. Die Härte eines Schienenstahls stellt sich nach dem

vorher besprochenen genaueren Verfahren im Mittel auf etwa 120 kg/qmm oder 12 000 atm, während gehärteter Gußstahl auf ungefähr das Dreifache kommt. Bei der Prüfung von Schienenstahl kann daher die Gußstahlkugel ihm gegenüber nahezu als unendlich hart angesehen werden, d. h. auf die besonderen Eigenschaften der Gußstahlkugel, die man zu dem Versuche verwendet, kommt es nicht mehr wesentlich an. Darin liegt die Rechtfertigung des abgekürzten Verfahrens, das für die praktischen Versuche bei der Abnahme von Schienenmaterial als ausreichend genau angesehen werden kann.

Zusammenstellung der wichtigsten Formeln.

Erster Abschnitt.

Allgemeine Untersuchungen über den Spannungszustand.

Seite

$$\sigma = \frac{P}{F}, \qquad (1)\ 8$$

σ bezogene Spannuug, P Zug- oder Druckkraft, F Querschnitt.

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \qquad (4)\ 21$$

τ_{xy} Schubspannungskomponente in der Richtung der Y-Achse für eine Schnittfläche, deren äußere Normale in der Richtung der positiven X-Achse geht.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + Z = 0 \end{aligned}\right\}, \qquad (5)\ 23$$

Gleichgewichtsbedingungen gegen Verschieben; X, Y, Z sind die Komponenten der an der Volumeneinheit angreifenden Massenkraft (Gewicht oder Trägheitskraft).

$$\left.\begin{aligned} p_{nx} &= \sigma_x \cos(nx) + \tau_{yx} \cos(ny) + \tau_{zx} \cos(nz) \\ p_{ny} &= \sigma_y \cos(ny) + \tau_{zy} \cos(nz) + \tau_{xy} \cos(nx) \\ p_{nz} &= \sigma_z \cos(nz) + \tau_{xz} \cos(nx) + \tau_{yz} \cos(ny) \end{aligned}\right\}, \qquad (6)\ 25$$

Gleichgewicht am Tetraeder; besonders angewendet für Elemente an der äußeren Umgrenzung des Körpers, wobei p_{nx} u. s. f. die Komponenten der äußeren Druckkraft auf die Oberfläche mit der Normalen n bedeuten.

Ebener Spannungszustand.

Seite

Hier ist

$$\sigma_z = 0, \quad \tau_{xz} = 0, \quad \tau_{yz} = 0, \qquad (8) \; 26$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{2\tau}{\sigma_y - \sigma_x} + n\frac{\pi}{2}, \qquad (11) \; 28$$

Gleichung zur Bestimmung der Hauptrichtungen des Spannungszustandes, φ der Winkel, den die Hauptschnittrichtung mit der X-Achse bildet.

$$\sigma'_{\substack{\max\\\min}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{4\tau^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2}, \qquad (12) \; 30$$

$\sigma'_{\max}$ und $\sigma'_{\min}$ die Hauptspannungen.

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau}. \qquad (13) \; 30$$

Gleichung zur Bestimmung der Schnittrichtung, für die die Schubspannung τ' zu einem Maximum oder Minimum wird. Für die Grenzwerte selbst hat man

$$\tau'_{\substack{\max\\\min}} = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{4\tau^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2}. \qquad (14) \; 31$$

Zweiter Abschnitt.

Elastische Formänderung. Beanspruchung des Materials.

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \alpha\sigma, \qquad (18) \; 44$$

Hookesches Gesetz; ε bezogene Dehnung, E Elastizitätsmodul, α Dehnungskoeffizient.

$$\varepsilon = f(\sigma) \quad \text{oder umgekehrt} \quad \sigma = \varphi(\varepsilon), \qquad (20) \; 49$$

allgemeiner Ausdruck für das Elastizitätsgesetz.

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \varphi'(\varepsilon), \qquad (21) \; 49$$

$$\frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\sigma}{f(\sigma)} = \frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon}. \qquad (22) \; 49$$

Seite

Die rechten Seiten dieser beiden Gleichungen sind im allgemeinen voneinander verschieden; jeder von beiden Werten wird gelegentlich als Elastizitätsmodul bezeichnet. Eine dritte Definition von E folgt aus

$$E = \left(\varphi'(\varepsilon)\right)_{\varepsilon=0} = \left(\frac{\sigma}{f(\sigma)}\right)_{\sigma=0}. \qquad (23) \; 50$$

$$\varepsilon = \alpha\sigma^m, \qquad (24) \; 50$$

Potenzgesetz; α und m sind Konstanten, die aus Versuchen entnommen werden.

$$\varDelta dx = \alpha dx \sigma_x = \frac{1}{E} dx \sigma_x, \qquad (26) \; 52$$

$$\varepsilon_x = \frac{\varDelta dx}{dx} = \frac{\sigma_x}{E}, \qquad (27) \; 52$$

$$\varepsilon_y = \frac{\varDelta dy}{dy} = -\frac{1}{m}\frac{\sigma_x}{E}, \qquad (28) \; 52$$

Formeln für die einfache Längsspannung nach dem Hookeschen Gesetze; $\frac{1}{m}$ Konstante von Poisson, liegt gewöhnlich zwischen $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{3}$.

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z, \qquad (29) \; 54$$

$$e = \frac{m-2}{m}\varepsilon_x = \frac{m-2}{mE}\sigma_x, \qquad (30) \; 54$$

Formeln für die kubische Ausdehnung e.

$$\gamma = \beta\tau = \frac{\tau}{G}, \qquad (31) \; 55$$

γ elastische Änderung eines ursprünglich rechten Winkels, die zur Schubspannung τ gehört; β Schiebungskoeffizient, G Schubelastizitätsmodul.

$$G = \frac{m}{2(m+1)}E, \qquad (32) \; 57$$

Zusammenhang zwischen den drei Elastizitätsmaßen.

$$\sigma_{\text{red}} = \sigma_{\text{I}} - \frac{1}{m}\sigma_{\text{II}} \quad \text{oder} \quad \sigma_{\text{red}} = \sigma_{\text{II}} - \frac{1}{m}\sigma_{\text{I}}, \qquad (34) \; 64$$

Formel zur Berechnung der reduzierten Spannung σ_{red}

Seite

beim ebenen Spannungszustande; σ_{I} und σ_{II} die beiden Hauptspannungen.

$$\sigma_{\mathrm{red}} = \sigma_{\mathrm{I}} - \frac{1}{m}(\sigma_{\mathrm{II}} + \sigma_{\mathrm{III}}), \qquad (35)\ \mathbf{64}$$

dasselbe für den allgemeinsten Spannungszustand.

$$\tau_{\mathrm{zul}} = \frac{m}{m+1}\sigma_{\mathrm{zul}}, \qquad (36)\ \mathbf{65}$$

τ_{zul} die zulässige Spannung bei der reinen Schubbeanspruchung, σ_{zul} die zulässige Normalspannung beim einachsigen Spannungszustande.

$$\sigma_{\mathrm{red}} = \frac{m-1}{2m}\sigma_x \pm \frac{m+1}{2m}\sqrt{4\tau^2 + \sigma_x^2}, \qquad (37)\ \mathbf{66}$$

Formel zur Berechnung der reduzierten Spannung bei Übereinanderlagerung einer reinen Schubbeanspruchung mit einem einachsigen Spannungszustande.

$$A = \frac{P'}{\Delta l}\int_0^{\Delta l} x\,dx = \tfrac{1}{2}P'\Delta l, \qquad (38)\ \mathbf{67}$$

A Formänderungsarbeit für die Kraft P' und die zugehörige Längenänderung Δl.

$$\mathsf{A} = \tfrac{1}{2}\sigma\varepsilon = \tfrac{1}{2}E\varepsilon^2 = \frac{\sigma^2}{2E}, \qquad (39)\ \mathbf{68}$$

A bezogene Formänderungsarbeit beim einachsigen Spannungszustande;

$$\mathsf{A} = \frac{1}{E}\left(\frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{2} - \frac{1}{m}\sigma_x\sigma_y\right). \qquad (40)\ \mathbf{68}$$

für den ebenen Spannungszustand,

$$\mathsf{A} = \frac{1}{E}\left(\frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2}{2} - \frac{1}{m}(\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z)\right), \qquad (41)\ \mathbf{68}$$

beim allgemeinsten Spannungszustande; und

$$\mathsf{A} = \frac{1}{2}\tau\gamma = \frac{1}{2}G\gamma^2 = \frac{\tau^2}{2G} \qquad (42)\ \mathbf{69}$$

für den Fall der reinen Schubbeanspruchung.

Seite

Dritter Abschnitt.

Biegung des geraden Stabes.

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = \frac{y}{y_0} \text{ oder } \sigma = y \cdot \frac{\sigma_0}{y_0}, \qquad (43)\ 84$$

Geradliniengesetz von Navier für die Spannungsverteilung bei der Biegung, σ und σ_0 Spannungen in den Abständen y und y_0 von der Nulllinie.

$$\sigma_0 = \frac{M}{\Theta} y_0, \qquad (46)\ 85$$

Biegungsgleichung, M Biegungsmoment, Θ Trägheitsmoment.

$$\sigma = \frac{M}{W}, \qquad (48)\ 86$$

W Widerstandsmoment.

$$\Phi_{yz} = 0 \qquad (50)\ 87$$

Bedingung für die Anwendbarkeit der einfachen Biegungsformel, Φ_{yz} Zentrifugalmoment.

$$\Theta_a = \Theta + a^2 \cdot F, \qquad (51)\ 89$$

Θ Trägheitsmoment für die Schwerlinie, Θ_a für eine dazu parallele Achse im Abstande a, F Querschnittsfläche.

$$\Theta_\alpha = \cos^2\alpha\,\Theta_y + \sin^2\alpha\,\Theta_z - \sin 2\alpha\,\Phi_{yz}, \qquad (52)\ 90$$

$$\Phi_\alpha = \frac{\Theta_y - \Theta_z}{2} \sin 2\alpha + \Phi_{yz} \cos 2\alpha, \qquad (53)\ 90$$

Trägheitsmoment und Zentrifugalmoment für eine Schwerlinie, die mit der Y-Achse den Winkel α bildet.

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\,\Phi_{yz}}{\Theta_z - \Theta_y}, \qquad (54)\ 91$$

durch diese Gleichung werden die Richtungen α der Querschnittshauptachsen bestimmt.

$$i_\alpha^2 = \frac{\Theta_\alpha}{F}, \qquad (56)\ 92$$

i_α Trägheitshalbmesser.

$$i_\alpha^2 = \cos^2\alpha\, i_y^2 + \sin^2\alpha\, i_z^2. \qquad (57)\ 92$$

$$\Theta_p = \Theta_y + \Theta_z, \qquad (61)\ 96$$

Θ_p das polare Trägheitsmoment.

Seite

$$\sigma = \frac{M \cos \alpha}{\Theta_z} \cdot y + \frac{M \sin \alpha}{\Theta_y} \cdot z, \qquad (62) \quad 97$$

Spannungsberechnung bei schiefer Belastung. Speziell für den rechteckigen Querschnitt:

$$\sigma = \frac{6\,Mc}{b^2 h^2}, \qquad (63) \quad 99$$

c Breite der Horizontalprojektion des Balkens, b und h Rechteckseiten.

$$\sigma = \frac{P}{F}\left(1 + \frac{vz}{b^2} + \frac{uy}{a^2}\right), \qquad (64) \quad 101$$

Formel für die Spannungsverteilung bei exzentrischer Zug- oder Druckbelastung, u, v Koordinaten des Angriffspunktes von P, y und z Koordinaten der Stelle, zu der σ gehört, a und b Hauptträgheitshalbmesser.

$$\frac{uy}{a^2} + \frac{vz}{b^2} = -1, \qquad (65) \quad 101$$

Gleichung der Nulllinie.

$$\sigma_0 = \frac{M}{F \cdot k} = \frac{M}{W}, \qquad (68) \text{ und } (69) \quad 111$$

Biegungsgleichung für schiefe Belastung, k Kernweite, $W = Fk$ das Widerstandsmoment im erweiterten Sinne.

$$V = \frac{dM}{dx}, \qquad (70) \quad 115$$

Zusammenhang zwischen Scherkraft V und Biegungsmoment M.

$$\tau_{xy} = \frac{V}{b\Theta}\int_u^{\frac{h}{2}} y\,dF, \qquad (71) \quad 116$$

τ_{xy} Schubspannung im gebogenen Stabe, b Querschnittsbreite im Abstande u von der Nulllinie. Das Integral ist das statische Moment des jenseits u liegenden Teiles der Querschnittsfläche.

$$P = \int \Delta\sigma\,dF = \frac{Ve}{\Theta}\int y\,dF = \frac{Ve}{\Theta} \cdot S, \qquad (73) \quad 124$$

P Kraft, die von einem Niete in einem genieteten Träger zu übertragen ist, e Nietteilung, S statisches Moment des durch den Niet angeschlossenen Querschnittsteiles.

Seite

$$d\varphi = dx \frac{M}{E\Theta}, \qquad (74)\ 125$$

$d\varphi$ Verdrehung zweier benachbarter Querschnitte gegeneinander.

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{M}{E\Theta} \quad \text{oder} \quad \varrho = \frac{E\Theta}{M}, \qquad (75)\ 125$$

ϱ Krümmungshalbmesser der elastischen Linie.

$$E\Theta \frac{d^2y}{dx^2} = -M, \qquad (76)\ 125$$

Differentialgleichung der elastischen Linie.

$$f = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{E\Theta} = \frac{5}{384} \frac{Ql^3}{E\Theta}, \qquad (79)\ 128$$

f Biegungspfeil eines Balkens für die gleichförmig verteilte Last Q, l Spannweite.

$$f = \frac{Pl^3}{48 E\Theta}, \qquad (82)\ 129$$

desgl. für die Einzellast P in der Mitte.

$$du = \varkappa du' = \varkappa \frac{V dx}{GF}, \qquad (83)\ 134$$

du Einsenkung wegen des Einflusses der Schubspannungen auf die Biegungslinie, $\varkappa$ ein von der Gestalt des Querschnitts abhängiger Zahlenfaktor, nämlich

$$\varkappa = \frac{F\int \tau^2 dF}{V^2}. \qquad (84)\ 135$$

$$f' = \frac{Pl^3}{4Ebh^3} + 0{,}3 \frac{Pl}{Gbh} = \frac{Pl}{4Ebh}\left(\frac{l^2}{h^2} + 3\right). \qquad (86)\ 137$$

f' Biegungspfeil für Einzellast P in der Mitte bei rechteckigem Querschnitte mit Berücksichtigung der Schubspannungen, h Balkenhöhe.

Vierter Abschnitt.

Die Formänderungsarbeit.

$$dA = \frac{M^2}{2E\Theta} dx, \qquad (87)\ 158$$

dA Formänderungsarbeit im Balkenelemente dx bei der reinen Biegung.

Seite

$$A = \tfrac{1}{2}\int \frac{M^2}{E\Theta}\,dx + \tfrac{1}{2}\int \frac{\varkappa V^2}{GF}\,dx, \qquad (89) \quad 160$$

Formänderungsarbeit des ganzen Balkens mit Berücksichtigung der Schubspannungen.

$$A = \tfrac{1}{2}\sum Py, \qquad (90) \quad 161$$

Arbeit der äußeren Kräfte gleich der aufgespeicherten Formänderungsarbeit.

$$\frac{\partial A}{\partial P_i} = \tfrac{1}{2}\sum P\frac{\partial y}{\partial P_i} + \tfrac{1}{2}y_i, \qquad (91) \quad 163$$

$$\frac{\partial A}{\partial P_i} = \sum P\frac{\partial y}{\partial P_i}, \qquad (92) \quad 164$$

$$\frac{\partial A}{\partial P_i} = y_i, \qquad (93) \quad 165$$

Formeln von Castigliano, P_i irgend eine der Lasten, y_i die elastische Verschiebung ihres Angriffspunktes im Sinne von P_i. Für eine Auflagerkraft geht dies über in

$$\frac{\partial A}{\partial P_i} = 0, \qquad (95) \quad 167$$

Satz vom Minimum der Formänderungsarbeit.

$$\tfrac{1}{2}P'f_d = nP(h + f_d), \qquad (100) \quad 178$$

stoßweise Belastung, h Fallhöhe von P, P' die gleichwertige statische Belastung, f_d der dynamische Biegungspfeil, n ein echter Bruch, der am besten aus Versuchen zu entnehmen ist.

$$\frac{\partial y_i}{\partial P_k} = \frac{\partial y_k}{\partial P_i}, \qquad (103) \quad 179$$

Satz von Maxwell über die Gegenseitigkeit der Verschiebungen.

Fünfter Abschnitt.

Stäbe mit gekrümmter Mittellinie.

$$\frac{1}{\varrho'} - \frac{1}{\varrho} = \frac{M}{E\Theta}, \qquad (111) \quad 191$$

Gleichung für die Änderung der Krümmung durch ein Biegungsmoment M.

Seite

$$\varDelta d\varphi = ds \frac{M}{E\Theta}, \qquad (112) \ 191$$

$\varDelta d\varphi$ elastische Verdrehung zweier Querschnitte gegeneinander.

$$E\Theta\left(\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{y}{a^2}\right) = \pm M, \qquad (114) \ 193$$

Formel für die Verbiegung eines ursprünglich kreisförmigen Stabes, x Bogenlänge von einem festen Anfangspunkte, y Ausweichung in radialer Richtung, a Radius.

$$H = \frac{\int \frac{M_b z}{E\Theta} ds}{\int \frac{z^2}{E\Theta} ds}, \qquad (117) \ 196$$

H Horizontalschub eines Bogens mit zwei Gelenken; M_b Biegungsmoment, das ein Balkenträger unter derselben Belastung an der gleichen Stelle aufzunehmen hätte, z Ordinate der Bogenmittellinie, ds Bogenelement. In der Formel ist nur auf den Einfluß der Biegungsmomente Rücksicht genommen.

$$H = \frac{\int M_b z\, ds}{\int z^2 ds}, \qquad (118) \ 196$$

dasselbe, wenn E und Θ konstant sind.

$$H = \frac{ql^2}{8h}, \qquad (119) \ 197$$

Horizontalschub für gleichförmige Belastung q für die Längeneinheit im Grundrisse, h Pfeilhöhe, l Spannweite.

$$H = \frac{\int \frac{M_b z}{E\Theta} ds}{\int \frac{z^2}{E\Theta} ds + \int \frac{ds}{EF}}, \qquad (120) \ 200$$

Formel für den Horizontalschub mit Berücksichtigung des Einflusses der Normalkraft; F Querschnittsfläche.

$$H = \frac{\int M_b z\, ds}{\int (z^2 + i^2) ds}, \qquad (121) \ 200$$

Seite

dasselbe, wenn E, Θ und F konstant sind, i Trägheitshalbmesser.

$$\Delta l = \int z \Delta d\varphi = \int \frac{Mz}{E\Theta} ds, \qquad (122) \quad 201$$

Δl Spannweitenvergrößerung eines gekrümmten Stabes unter dem Einflusse gegebener Momente M.

$$H = \frac{\eta l}{\int \frac{z^2}{E\Theta} ds}, \qquad (123) \quad 205$$

Horizontalschub für eine Temperaturänderung des Bogens; η Produkt aus Temperaturunterschied und Ausdehnungskoeffizient.

$$\frac{\partial A}{\partial U} = -u \qquad (124) \quad 206$$

tritt an die Stelle der Gl. (95) von Castigliano, wenn Temperaturänderungen berücksichtigt werden.

$$\sigma = \frac{6Pr}{\pi l h^2}, \qquad (125) \quad 211$$

σ Biegungsspannung in einem Ringe von rechteckigem Querschnitte, der längs eines Durchmessers mit P zusammengedrückt wird; r mittlerer Halbmesser, h Wandstärke, l andere Querschnittsseite.

$$\sigma = \frac{6Pr}{\pi l h^2}\left(1 - \frac{h^2}{12 r^2}\right), \qquad (127) \quad 212$$

dasselbe, mit Berücksichtigung der Normalkraft.

$$\Delta d = \frac{Pr^3}{E\Theta} \cdot \frac{4-\pi}{2\pi} = 1{,}639 \frac{Pr^3}{Elh^3}, \qquad (128) \quad 213$$

Δd elastische Vergrößerung des zur Kraftrichtung senkrechten Durchmessers.

$$\Delta\varphi = \frac{Pp}{E\Theta} l, \qquad (130) \quad 217$$

$\Delta\varphi$ Winkel, um den man eine ebene Spiralfeder aufziehen muß, bis die Kraft am äußeren Ende zu P wird; p Entfernung des äußeren Federendes von der Spindelmitte, l Länge der Spirallinie.

Seite

$$A = \tfrac{1}{2} M \varDelta \varphi = \frac{(Pp)^2}{2 E \Theta} l,$$ (131) **217**

A Formänderungsarbeit, die in der Spiralfeder aufgespeichert wird.

$$A = \frac{\sigma^2 b h l}{24 E} = \frac{\sigma^2}{24 E} \cdot V,$$ (133) **218**

dasselbe für rechteckigen Querschnitt, V das Volumen der Feder, σ die größte zulässige Spannung.

$$\sigma = \frac{r y}{r + y} \cdot \frac{M}{\Theta'},$$ (134) **221**

Formel für die hyperbolische Spannungsverteilung unter der Voraussetzung, daß die Querschnitte eben bleiben; r Krümmungshalbmesser der Stabachse, Θ' ein Ausdruck

$$\Theta' = \int y^2 dF - \frac{1}{r} \int y^3 dF + \frac{1}{r^2} \int y^4 dF - \cdots,$$

der von dem Trägheitsmomente Θ gewöhnlich nicht viel abweicht.

Sechster Abschnitt.

Stäbe auf nachgiebiger Unterlage.

$$\frac{dV}{dx} = p,$$ (135) **235**

V Scherkraft, dx Längenelement des Stabes, p Druck für die Längeneinheit auf die Unterlage; hierfür auch

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = p.$$ (136) **235**

$$E \Theta \frac{d^4 y}{dx^4} = -p,$$ (137) **236**

Differentialgleichung für die elastische Linie der Eisenbahnschwelle u. s. f.

$$p = k y,$$ (138) **236**

k Bettungsziffer.

Seite

$$y = C_1 e^{\alpha x} \cos \alpha x + C_2 e^{\alpha x} \sin \alpha x + C_3 e^{-\alpha x} \cos \alpha x + C_4 e^{-\alpha x} \sin \alpha x, \quad (140) \quad 236$$

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{k}{4 E \Theta}}, \quad (141) \quad 236$$

endliche Gleichung der elastischen Linie für die Eisenbahnschwelle. Für die Konstantenbestimmung dienen die Gleichungen (142) bis (146).

Siebenter Abschnitt.

Die Festigkeit von ebenen Platten, die am ganzen Umfange unterstützt sind.

$$\varepsilon_t = \frac{z \varphi}{x}, \quad (147) \quad 251$$

ε_t Dehnung in tangentialer Richtung, x Abstand von der Achse, z Abstand von der Mittelfläche, φ Neigung der Normalen zur elastischen Fläche gegen die Achse.

$$\varepsilon_r = \frac{z\, d\varphi}{dx}, \quad (148) \quad 252$$

ε_r Dehnung in radialer Richtung.

$$\sigma_t = \frac{mE}{m^2 - 1}(m \varepsilon_t + \varepsilon_r); \quad \sigma_r = \frac{mE}{m^2 - 1}(m \varepsilon_r + \varepsilon_t), \quad (149) \quad 252$$

Spannungen in den beiden Hauptrichtungen. (In der Formel für σ_r sind auf S. 252 zwei Druckfehler stehen geblieben, die hier verbessert sind.)

$$\text{Mom. der } \sigma_t = \frac{mE}{m^2 - 1} \cdot \frac{h^3}{12}\left(m \frac{\varphi}{x} + \frac{d\varphi}{dx}\right) dx\, d\alpha, \quad (151) \quad 254$$

$$\text{Mom. aller } \sigma_r = \frac{mE}{m^2 - 1} \cdot \frac{h^3}{12}\left(m x \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + m \frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dx}\right) dx\, d\alpha, \quad (152) \quad 255$$

$$\text{Mom. der } \tau = \frac{x^2 p}{2}\, d\alpha\, dx; \quad (153) \quad 256$$

bei der letzten Formel ist vorausgesetzt, daß die Platte eine gleichförmig über die Fläche verteilte Belastung p für die Flächeneinheit trägt.

Seite

$$x^2 \frac{d^2\varphi}{dx^2} + x\frac{d\varphi}{dx} - \varphi + Nx^3 = 0, \qquad (155)$$ 256

Differentialgleichung des Problems; N eine Konstante, gegeben durch Gl. (154).

$$\varphi = \frac{N}{8}(r^2x - x^3) = \frac{3(m^2-1)}{4m^2Eh^3}\,p(r^2x - x^3), \qquad (157)$$ 257

Lösung der Gleichung mit Berücksichtigung der Grenzbedingungen, wobei die Platte am Rande als eingespannt vorausgesetzt wird.

$$\sigma_{\text{red}} = E\frac{Nr^2}{4}\cdot\frac{h}{2} = \frac{3(m^2-1)}{4m^2}\cdot\frac{r^2}{h^2}p = 0{,}68\,p\frac{r^2}{h^2} \text{ für } m = \frac{10}{3}, \qquad (159)$$ 258

σ_{red} Anstrengung des Materials (wird am Rande am größten).

$$y = \frac{N}{32}(x^4 - 2r^2x^2 + r^4) = \frac{N}{32}(x^2 - r^2)^2, \qquad (161)$$ 259

Gleichung der elastischen Fläche.

$$f = \frac{3(m^2-1)}{16m^2Eh^3}\,pr^4 = 0{,}17\,\frac{pr^4}{Eh^3}, \qquad (162)$$ 259

f Biegungspfeil in der Mitte.

$$x^2\frac{d^2\varphi}{dx^2} + x\frac{d\varphi}{dx} - \varphi + Qx = 0, \qquad (165)$$ 260

Differentialgleichung für eine Einzellast P in der Mitte; Q eine Konstante (Gl. 164).

$$\varphi = \frac{Q}{2}x \lg\frac{r}{x}, \qquad (167)$$ 260

Lösung der Gleichung, Platte am Rande eingespannt.

$$\sigma_{\text{red}} = \frac{3(m^2-1)}{2\pi m^2}\frac{P}{h^2} = 0{,}43\frac{P}{h^2}, \qquad (169)$$ 260

σ_{red} Anstrengung des Materials am Umfange.

$$\sigma_{\text{red}} = 0{,}43\frac{P}{h^2}\lg\frac{r}{a}, \qquad (173)$$ 263

σ_{red} Anstrengung des Materials in der Mitte; a Halbmesser des kleinen Kreises, über den man sich P verteilt denken kann (Logarithmus zur Basis e zu nehmen).

Seite

$$f = \frac{Qr^2}{8} = \frac{3(m^2-1)}{4\pi m^2} \cdot \frac{Pr^2}{Eh^3} = 0{,}22 \frac{Pr^2}{Eh^3}, \quad (177) \quad 264$$

Biegungspfeil (immer noch eingespannte Platte).

$$\varphi = \frac{N}{8}\left(\frac{3m+1}{m+1} r^2 x - x^3\right), \quad (180) \quad 265$$

tritt an Stelle von Gl. (157), wenn die Platte frei aufliegt und nicht merklich über den Auflagerkreis hinaus reicht.

$$\sigma_{red} = \frac{3(m^2-1)(3m+1)}{8m^2(m+1)} \cdot \frac{r^2}{h^2} p = 0{,}87 \frac{r^2}{h^2} p, \quad (182) \quad 266$$

σ_{red} Anstrengung des Materials in der Mitte, wo sie am größten wird.

$$f = \frac{3}{16} \cdot \frac{m^2-1}{m^2 E h^3} \cdot p \cdot \frac{5m+1}{m+1} r^4 = 0{,}70 \frac{p}{E} \cdot \frac{r^4}{h^3}, \quad (185) \quad 266$$

f Biegungspfeil für die frei aufliegende Platte.

$$f = \frac{3(m-1)(3m+1)}{4\pi m^2} \cdot \frac{Pr^2}{Eh^3} = 0{,}55 \frac{Pr^2}{Eh^3}, \quad (188) \quad 268$$

dasselbe für Einzellast P in der Mitte.

$$\sigma = p \frac{r^2}{h^2}, \quad (190) \quad 271$$

Formel der Näherungstheorie für die kreisförmige Platte.

$$\sigma = \frac{3a-2b}{a} \cdot p \frac{b^2}{h^2}, \quad (196) \quad 278$$

Näherungsformel für elliptische Platte, a und b Halbachsen der Ellipse ($a > b$).

$$\sigma = \frac{6M}{dh^2} = p \frac{a^2}{h^2}, \quad (197) \quad 297$$

Näherungsformel für quadratische Platten, a Halbseite;

$$\sigma = 2p \frac{a^2}{a^2+b^2} \cdot \frac{b^2}{h^2} = p \frac{c^2}{2h^2}, \quad (198) \quad 280$$

desgleichen für die rechteckige Platte, a und b Rechteckhalbseiten.

Achter Abschnitt.

Die Festigkeit von Gefäßen unter innerem oder äußerem Überdrucke.

$$\sigma = \frac{pr}{2h}, \qquad (199)$$ 284

σ Wandspannung in einem dünnwandigen Kugelkessel, r Radius, p innerer Überdruck, h Wandstärke.

$$\sigma_{\text{red}} = \frac{m-1}{m}\sigma = \frac{m-1}{m}\cdot\frac{pr}{2h} = 0{,}35\frac{pr}{h}\left(\text{für } m = \frac{10}{3}\right), \qquad (200)$$ 285

Ermittelung der zu σ gehörigen reduzierten Spannung.

$$\sigma_{\text{red}} = \sigma_t - \frac{1}{m}\sigma_a = \frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{pr}{h} = 0{,}85\frac{pr}{h}\left(\text{für } m = \frac{10}{3}\right), \qquad (202)$$ 286

gilt für den zylindrischen Kessel.

$$p_k = \frac{E}{4}\left(\frac{h}{c}\right)^3, \qquad (210)$$ 291

p_k der kritische äußere Überdruck, der das Ausknicken der Wand eines langen zylindrischen Rohres herbeiführt, c Kreishalbmesser (Anwendung auf Flammrohre).

$$x^2\frac{d^2u}{dx^2} + x\frac{du}{dx} - u = 0, \qquad (214)$$ 296

Differentialgleichung für die elastische Verschiebung u in radialer Richtung bei dickwandigen Röhren; x Abstand von der Rohrachse.

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= p\frac{a^2}{b^2-a^2}\cdot\frac{x^2-b^2}{x^2}\\ \sigma_t &= p\frac{a^2}{b^2-a^2}\cdot\frac{x^2+b^2}{x^2}\end{aligned}\right\}, \qquad (219)$$ 297

$$\sigma_{\text{red}} = E[\varepsilon_t]_{x=a} = E\left(\frac{u}{x}\right)_{x=a} = \frac{p}{b^2-a^2}\left(\frac{m-1}{m}a^2 + \frac{m+1}{m}b^2\right), \qquad (220)$$ 297

Formeln für die Spannungen in radialer und tangentialer Richtung und für die reduzierte Spannung an der Innenseite des Rohrs; a innerer, b äußerer Halbmesser.

Seite

Neunter Abschnitt.

Die Verdrehungsfestigkeit.

$$\tau = \frac{\tau' r}{a}, \qquad (222) \quad 308$$

τ und τ' Torsionsspannungen in der Welle von kreisförmigem Querschnitte in den Abständen r und a.

$$\tau' = \frac{M}{\Theta_p} \cdot a, \qquad (223) \quad 309$$

$$\tau' = \frac{2M}{\pi a^3}, \qquad (224) \quad 309$$

$$\Delta\varphi = \frac{\tau l}{Gr} = \frac{\tau' l}{Ga} = \frac{2Ml}{\pi a^4 G}, \qquad (225) \quad 309$$

Formeln für die Torsion von Wellen kreisförmigen Querschnitts, τ' Spannung am Rande, a Halbmesser, $\Delta\varphi$ Verdrehungswinkel für die Länge l, M Verdrehungsmoment.

$$\tau_{xy} = ka^2 z; \quad \tau_{xz} = -kb^2 y \qquad (227) \quad 311$$

Spannungsverteilungsgesetz für die Welle von elliptischem Querschnitte, a und b Halbachsen der Ellipse in der Richtung der y und z, k eine Konstante, die aus

$$k = \frac{2M}{\pi a^3 b^3}. \qquad (229) \quad 313$$

folgt.

$$\tau_{max} = \frac{2M}{\pi a^2 b}, \qquad (230) \quad 314$$

wenn $a < b$ ist.

$$\tau_{xy} = c_1 z - \frac{c_1}{a^2} z y^2, \qquad (231) \quad 316$$

$$\tau_{xz} = k_1 y - \frac{k_1}{b^2} y z^2, \qquad (232) \quad 316$$

für annäherungsweise Berechnung angenommenes Spannungsverteilungsgesetz für die Welle von rechteckigem Querschnitte; c_1 und k_1 Konstanten, die weiterhin berechnet werden, a und b Halbseiten des Rechtecks.

Seite

$$\left.\begin{aligned}\tau_{xy} &= \frac{9M}{16ab^3} z\left(1-\frac{y^2}{a^2}\right)\\ \tau_{xz} &= -\frac{9M}{16a^3b} y\left(1-\frac{z^2}{b^2}\right)\end{aligned}\right\},\qquad (236)\ \mathbf{318}$$

$$\tau = \frac{9M}{2a_1{}^2b_1}, \qquad (238)\ \mathbf{319}$$

ebenfalls für den rechteckigen Querschnitt; in der letzten Formel ist τ die größte Spannung, a_1 die ganze kleinere und b_1 die ganze größere Rechteckseite.

$$\tau = \frac{2Pr}{\pi a^3}, \qquad (240)\ \mathbf{321}$$

$$w = P\frac{4nr^3}{a^4G}, \qquad (242)\ \mathbf{324}$$

$$A = P^2\frac{2nr^3}{a^4G}, \qquad (243)\ \mathbf{324}$$

Formeln für die zylindrischen Torsionsfedern, r Zylinderhalbmesser, a Querschnittshalbmesser, w Zusammendrückung der Feder unter der Last P, A aufgespeicherte Formänderungsarbeit.

Zehnter Abschnitt.

Die Knickfestigkeit.

$$\alpha = \sqrt{\frac{P}{E\Theta}}, \qquad (246)\ \mathbf{330}$$

$$v = \frac{\sin\alpha x}{\sin\alpha l}(u_l - u_0\cos\alpha l) + u_0\cos\alpha x, \qquad (247)\ \mathbf{330}$$

Gleichung der elastischen Linie, wenn die u die ursprünglichen Exzentrizitäten sind.

$$P_E = \pi^2\frac{E\Theta}{l^2}, \qquad (249)\ \mathbf{331}$$

Eulersche Formel für Lagerung zwischen Spitzen.

$$f = \frac{f_0}{\frac{P_E}{P}-1}, \qquad (255)\ \mathbf{334}$$

f Ausbiegung der Mitte eines vorher schon ein wenig (um f_0) gekrümmten Stabes unter der Last P.

Seite

$$\varphi = \pi \frac{f}{l},$$ (256) **334**

φ Drehungswinkel des Stabendes.

$$P_K = \frac{P_D + (\eta + 1)P_E}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{P_D + (\eta + 1)P_E}{2}\right)^2 - P_D P_E},$$ (257) **336**

P_K wirkliche Knickbelastung, P_D Belastung eines kürzeren Stückes bei Erreichung der Proportionalitätsgrenze, η die absolute Zahl

$$\eta = \frac{aFf_0}{\Theta}.$$

$$P_K = aF - b\frac{lF}{i},$$ (259) **338**

$$\frac{P_K}{F} = \left(0{,}53\left(\frac{l}{i}\right)^2 - 120\frac{l}{i} + 7760\right)\text{atm},$$ (260) **338**

empirische Formeln von v. Tetmajer, die letzte für Gußeisen, i kleinster Trägheitshalbmesser des Querschnitts.

$$P = 4\pi^2 \frac{E\Theta}{l^2},$$ (264) **341**

Eulersche Formel für beiderseits eingespannte Stäbe.

$$P = 20\frac{E\Theta}{l^2},$$ (268) **343**

desgl. für Einspannung auf einer Seite, während das andere Ende drehbar befestigt ist.

$$f = \frac{Q}{2P\alpha}\left\{\operatorname{tg}\frac{\alpha l}{2} - \frac{\alpha l}{2}\right\},$$ (269) **344**

Biegungspfeil, wenn eine Knicklast P mit einer Biegungslast Q in der Mitte zusammenwirkt.

$$f = \frac{Ql^3}{48E\Theta}\left(1 + \frac{Pl^2}{10E\Theta}\right),$$ (270) **345**

dasselbe, weiter entwickelt.

$$p = \varkappa\frac{l^2}{a},$$ (273) **347**

Annahme für die Exzentrizität p, die der Navier-Schwarz-Rankineschen Formel zu Grunde liegt, $\varkappa$ Erfahrungskoeffizient.

Seite

$$P_{zul} = \frac{F\sigma_{zul}}{1 + \varkappa \frac{l^2}{i^2}} \qquad (275) \ 348$$

ist diese Formel selbst.

Elfter Abschnitt.

Grundzüge der mathematischen Elastizitätstheorie.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial \zeta}{\partial z}, \qquad (276) \ 357$$

ε_x u. s. f. die bezogenen Dehnungen in den Richtungen der Koordinatenachsen, ausgedrückt in den Verschiebungskomponenten ξ, η, ζ.

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}; \ \gamma_{xz} = \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}; \ \gamma_{yz} = \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \qquad (277) \ 359$$

γ_{xy} die Änderung des ursprünglich rechten Winkels zwischen zwei parallel zur X- und zur Y-Achse gezogenen Geraden.

$$e = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}, \qquad (278) \ 360$$

e bezogene Volumenänderung (kubische Ausdehnung).

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = G\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right); \ \tau_{xz} = \tau_{zx} = G\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right);$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = G\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right), \qquad (279) \ 360$$

τ die Schubspannungskomponenten ausgedrückt in den Verschiebungen, G Schubelastizitätsmodul.

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= 2G\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{e}{m-2}\right) \\ \sigma_y &= 2G\left(\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{e}{m-2}\right) \\ \sigma_z &= 2G\left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{e}{m-2}\right) \end{aligned}\right\}, \qquad (283) \ 361$$

σ die Normalspannungskomponenten ausgedrückt in den Verschiebungen, m Verhältnisziffer zwischen Längsdehnung und Querzusammenziehung beim einachsigen Spannungszustande, gewöhnlich zwischen 3 und 4 liegend.

Seite

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \qquad (284)\ \mathbf{363}$$

Einführung der Laplaceschen Operators ∇^2.

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2\xi + \frac{m}{m-2}\cdot\frac{\partial e}{\partial x} + \frac{X}{G} &= 0 \\ \nabla^2\eta + \frac{m}{m-2}\cdot\frac{\partial e}{\partial y} + \frac{Y}{G} &= 0 \\ \nabla^2\zeta + \frac{m}{m-2}\cdot\frac{\partial e}{\partial z} + \frac{Z}{G} &= 0 \end{aligned}\right\}, \qquad (285)\ \mathbf{363}$$

Grundgleichungen der mathematischen Elastizitätstheorie, X, Y, Z sind die Komponenten der äußeren Massenkraft (Gewicht oder auch Trägheitskraft).

$$\nabla^2\mathfrak{v} + \frac{m}{m-2}\nabla e + \frac{\mathfrak{P}}{G} = 0, \qquad (286)\ \mathbf{364}$$

$$\nabla^2\mathfrak{v} + \frac{m}{m-2}\nabla \operatorname{div}\mathfrak{v} + \frac{\mathfrak{P}}{G} = 0; \qquad (287)\ \mathbf{364}$$

die auf die Koordinatenachsen bezogenen Grundgleichungen sind hier zu einer einzigen Vektorgleichung zusammengezogen, $\mathfrak{v}$ die Verschiebung mit den Komponenten ξ, η, ζ; $\mathfrak{P}$ die Kraft mit den Komponenten X, Y, Z; div ein aus anderen Teilen der mathematischen Physik bekanntes Operationszeichen.

$$\xi = A\sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{\tau}\right); \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0, \qquad (289)\ \mathbf{367}$$

Schwingungsbewegung in einer ebenen Schallwelle, λ Wellenlänge, τ Schwingungsdauer.

$$v = \frac{\lambda}{\tau} = \sqrt{\frac{G}{\mu}\cdot\frac{2m-2}{m-2}}, \qquad (291)\ \mathbf{369}$$

v die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles, μ die spezifische Masse, d. h. das Gewicht der Raumeinheit geteilt durch die Beschleunigung der Schwere.

$$\xi = A\sin 2\pi\left(\frac{y}{\lambda} - \frac{t}{\tau}\right); \quad \eta = 0; \quad \zeta = 0, \qquad (292)\ \mathbf{371}$$

für die transversale Schwingung.

Seite

$$v_t = \sqrt{\frac{G}{\mu}}, \qquad (294)\ 372$$

v_t Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Transversalwellen.

$$\sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0, \qquad (296)\ 376$$

diese Gleichungen kennzeichnen den von de Saint-Vénant untersuchten Spannungszustand.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial z}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) = 0, \qquad (308)\ 379$$

diese Bedingungen muß die spezifische Dehnung $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ in der Richtung der Stabachse erfüllen, wenn der durch die Gleichungen (296) angegebene Spannungszustand zustande kommen soll.

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4 xy + a_5 xz \qquad (309)\ 380$$

folgt daraus durch Integration. Damit wird die Naviersche Spannungsverteilung bei der Biegung bestätigt.

$$\xi = \varphi(y, z), \qquad (311)\ 385$$

$$\eta = b_0 + b_1 x + z(b_2 + b_3 x), \qquad (316)\ 385$$

$$\zeta = c_0 + c_1 x + y(c_2 + c_3 x), \qquad (317)\ 386$$

Lösung der Grundgleichungen für den Fall der reinen Torsion; die Verschiebungskomponente ξ muß noch der Bedingungsgleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi(yz)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi(yz)}{\partial z^2} = 0 \qquad (318)\ 386$$

genügen. Bei geeigneter Festlegung des Koordinatensystems vereinfachen sich die vorigen Formeln zu

$$\eta = cxz; \quad \zeta = -cxy; \quad \xi = \varphi(yz). \qquad (320)\ 387$$

$$\frac{\frac{\partial \xi}{\partial z} - cy}{\frac{\partial \xi}{\partial y} + cz} = \frac{dz}{dy}, \qquad (324)\ 389$$

Grenzbedingung, die am Umfange erfüllt sein muß, damit die Schubspannung in die Richtung der Tangente fällt.

Seite

$$\xi = \varphi(yz) = ayz, \qquad (327)\ \mathbf{391}$$

eine partikuläre Lösung von Gl. (318), die nach Einsetzen in die Grenzbedingung Gl. (324) zur Gleichung einer Ellipse für den Querschnittsumriß führt. Die einfachere Theorie der Torsion für den elliptischen Querschnitt wird hierbei bestätigt.

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \qquad (332)\ \mathbf{395}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = -2mGc, \qquad (333)\ \mathbf{395}$$

Gleichungen für das „Spannungsfeld“ in dem Querschnitte einer auf Verdrehen beanspruchten Welle (hydrodynamisches Gleichnis), v die Geschwindigkeiten, die den Spannungskomponenten proportional sind, m ein Proportionalitätsfaktor.

$$\tau_{\max} = \frac{3M}{a_1{}^2 b_1}, \qquad (337)\ \mathbf{399}$$

$$\Delta\varphi = \frac{3Ml}{a_1{}^3 b_1 G}, \qquad (339)\ \mathbf{399}$$

Formeln für die Schubbeanspruchung $\tau_{\max}$ und den Verdrehungswinkel $\Delta\varphi$ für den rechteckigen Querschnitt, wenn die eine Rechteckseite b_1 viel größer ist, als die andere a_1; l ist die Stablänge.

Formeln von Hertz für die Berührung elastischer Körper:

a) Zwei Kugeln von den Radien r_1 und r_2:

$$a = 1{,}11\sqrt[3]{\frac{P}{E}\cdot\frac{r_1 r_2}{r_1 \pm r_2}}, \qquad (341)\ \mathbf{404}$$

$$\sigma_0 = 0{,}388\sqrt[3]{PE^2\left(\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2}\right)^2}, \qquad (342)\ \mathbf{405}$$

$$\alpha = 1{,}23\sqrt[3]{\frac{P^2}{E^2}\cdot\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2}}, \qquad (343)\ \mathbf{405}$$

a Halbmesser der Druckfläche, σ_0 größte Druckspannung in der Mitte der Druckfläche, α Annäherung, die beide Körper durch die Abplattung erfahren, P Belastung.

Seite

b) Kugel vom Halbmesser r und Platte:

$$a = 1{,}11\sqrt[3]{\frac{Pr}{E}}, \qquad (344)\ 405$$

$$\sigma_0 = 0{,}388\sqrt[3]{\frac{PE^2}{r^2}}, \qquad (345)\ 405$$

$$\alpha = 1{,}23\sqrt[3]{\frac{P^2}{E^2 r}}. \qquad (346)\ 405$$

c) Zwei rechtwinklig gekreuzte Zylinder:

$$\sigma_0 = 0{,}388\sqrt[3]{\frac{PE^2}{r^2}}. \qquad (347)\ 405$$

d) Zwei parallele Zylinder:

$$a = 1{,}52\sqrt{\frac{P'}{E} \cdot \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}}, \qquad (348)\ 405$$

$$\sigma_0 = 0{,}418\sqrt{P'E\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2}}, \qquad (349)\ 405$$

P' ist die auf die Längeneinheit der Zylinderachse kommende Belastung.

e) Zylinder und Platte:

$$a = 1{,}52\sqrt{\frac{P'r}{E}}, \qquad (350)\ 406$$

$$\sigma_0 = 0{,}418\sqrt{\frac{P'E}{r}}. \qquad (351)\ 406$$

Sachverzeichnis.